Пример решения задачи:
Вычисление площади фигуры с помощью двойного интеграла

Задание.

С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями (неравенствами).

$$y = x^2, \qquad x = 2y^2$$

Решение.

Определим координаты точек пересечения линий:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = 2y^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y^2 = x^4 \\ x = 2x^4 \end{cases}$$

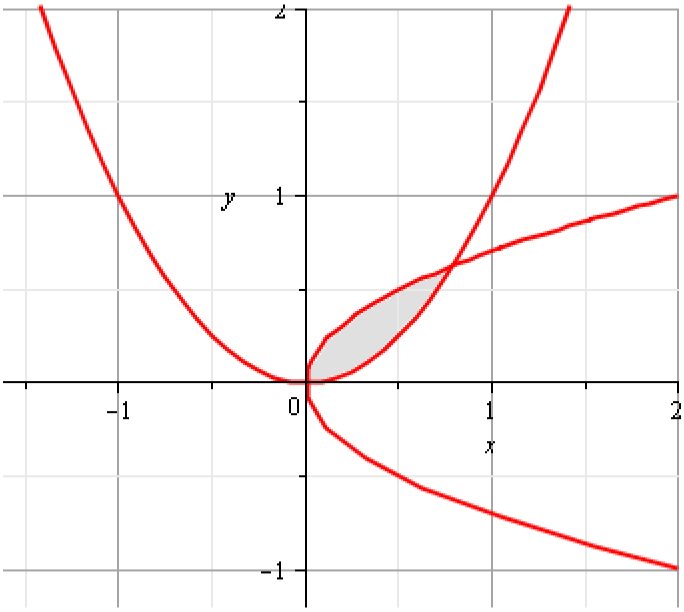
$$2x^4 - x = 0; \quad x(2x^3 - 1) = 0;$$

$$x = 0; \quad 2x^3 - 1 = 0 \ \rightarrow x^3 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Итак,

$$0 \le x \le \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Схематично построим заданную фигуру:



$$x = 2y^2 \ \rightarrow \ y^2 = \frac{1}{2}x \rightarrow \ y = \frac{\sqrt{2x}}{2} \quad (\text{так как } x \geq 0)$$

Искомая фигура задается неравенствами

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ x^2 \leq y \leq \dfrac{\sqrt{2x}}{2} \end{cases}$$

$$S = \int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} dx \int_{x^2}^{\frac{\sqrt{2x}}{2}} dy = \int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \left(y \Big|_{x^2}^{\frac{\sqrt{2x}}{2}} \right) dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x} - x^2 \right) dx$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^{3/2} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \left(2^{-1/3} \right)^{3/2} - \frac{1}{3} \left(2^{-1/3} \right)^3 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot 2^{-1/2} - \frac{1}{3} \cdot 2^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

Ответ. $1/6$