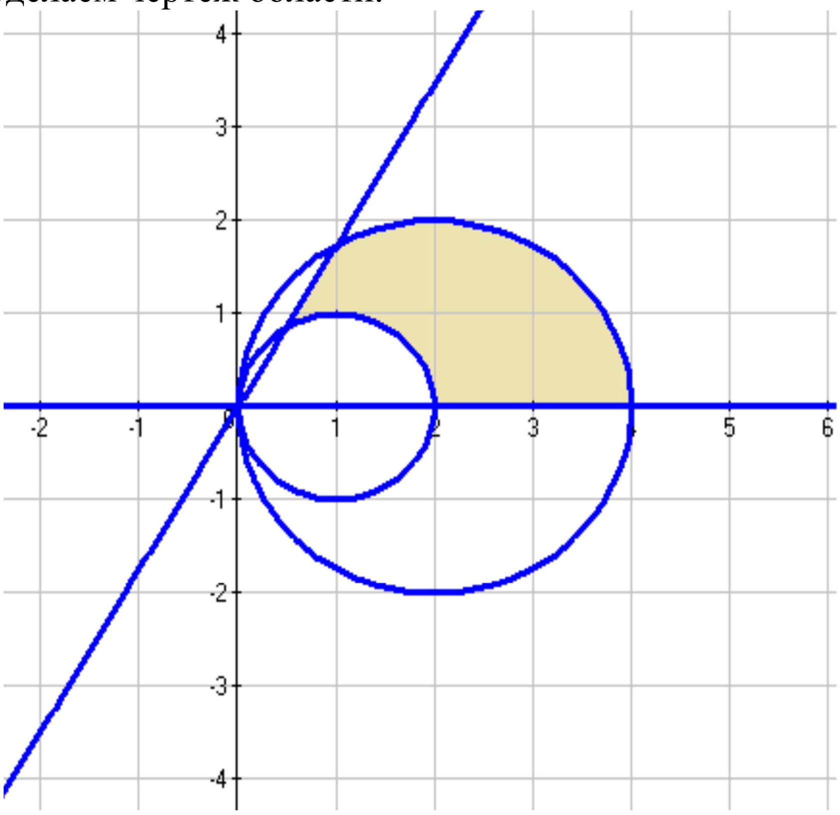
Решение задачи по двойным интегралам скачано с
https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=ma2int
(больше примеров по ссылке)
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

Пример решения задачи: площадь области с помощью двойного интеграла в полярных координатах

ЗАДАНИЕ.

Найти площадь области $x^2-2x+y^2=0, x^2-4x+y^2=0, y=0, y=\sqrt{3}x$

РЕШЕНИЕ. Сделаем чертеж области.



Перейдем к полярным координатам $x=r\cos a, y=r\sin a$.
Якобиан равен r

$$x^2-2x+y^2=0 \Rightarrow r^2-2r\cos a=0 \Rightarrow r=2\cos a$$
$$x^2-4x+y^2=0 \Rightarrow r^2-4r\cos a=0 \Rightarrow r=4\cos a$$
$$y=0 \Rightarrow r\sin a \geq 0 \Rightarrow a \in [0;\pi]$$
$$y \leq \sqrt{3}x \Rightarrow r\sin a \leq \sqrt{3}r\cos a \Rightarrow tga \leq \sqrt{3} \Rightarrow a \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right]$$

Тогда площадь области равна:

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}da\int_{2\cos a}^{4\cos a}rdr=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{2\cos a}^{4\cos a}da=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{(4\cos a)^2-(2\cos a)^2}{2}\right]da=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}12\cos^2 a da=\int_0^{\frac{\pi}{3}}12\frac{1+\cos 2a}{2}da=$$

$$=6\left[a+\frac{1}{2}\sin 2a\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=6\left[\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\sin 2\frac{\pi}{3}\right]=2\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $2\pi+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.