Решение задачи по двойным интегралам скачано с
https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=ma2int
(больше примеров по ссылке)
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

Пример решения задачи: Центр тяжести пластины с помощью двойного интеграла

Задание.

Найти координаты центра тяжести однородной пластины, ограниченной кривой

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)\ (0 \le t \le 2\pi);\ \ y = 0$$

Решение.

Так как пластина однородна, то ее плотность $\gamma(x, y) = 1$.

Сделаем замену $x = a(t - \sin t), y = y$, тогда $dx = a(1 - \cos t)dt$.

$$D:\ \begin{cases} 0 \le y \le a(1 - \cos t) \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$$

Найдем массу пластины по формуле:

$$m = \iint\limits_D \gamma(x, y)dxdy$$

$$m = \iint\limits_D dxdy = \int_0^{2\pi} dt \int_0^{a(1-\cos t)} a(1 - \cos t)dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(a(1 - \cos t)y \Big|_0^{a(1-\cos t)} \right) dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt =$$

$$= a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = a^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\pi a^2$$

Решение задачи по двойным интегралам скачано с
https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=ma2int
(больше примеров по ссылке)
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

Найдем статические моменты пластины относительно осей Ox и Oy:

$$S_x = \iint\limits_D y \cdot \gamma(x,y)dxdy = \int\limits_0^{2\pi} dt \int\limits_0^{a(1-\cos t)} a(1-\cos t) \cdot y dy$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{a}{2}(1-\cos t)y^2 \Big|_0^{a(1-\cos t)} \right) dt$$

$$= \frac{a^3}{2}\int\limits_0^{2\pi} (1-\cos t)^3 dt = \frac{a^3}{2}\int\limits_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)dt$$

$$= \frac{a^3}{2}t\Big|_0^{2\pi} - \frac{3a^3}{2}\sin t\Big|_0^{2\pi} +$$

$$+\frac{3}{4}a^3\int\limits_0^{2\pi} (1+\cos 2t)dt - \frac{a^3}{2}\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t \cdot \cos t\, dt$$

$$= \pi a^3 - \frac{3}{2}a^3 \cdot 0 + \frac{3}{4}a^3\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} -$$

$$-\frac{a^3}{2}\int\limits_0^{2\pi} (1-\sin^2 t)d(\sin t) = \pi a^3 + \frac{3}{4}\cdot 2\pi a^3 - \frac{a^3}{2}\left(\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{5}{2}\pi a^3 + 0 = \frac{5}{2}\pi a^3$$

$$S_y = \iint\limits_D x \cdot \gamma(x,y)dxdy = \int\limits_0^{2\pi} dt \int\limits_0^{a(1-\cos t)} a(t-\sin t) \cdot a(1-\cos t)dy =$$

$$= a^3\int\limits_0^{2\pi} (t-\sin t)(1-\cos t)^2 dt$$

$$= a^3\int\limits_0^{2\pi} t(1-2\cos t+\cos^2 t)dt - a^3\int\limits_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 \sin t\, dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = t & dv = (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt \\ du = dt & v = \frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t \end{matrix} \right|$$

$$= a^3 t\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} -$$

$$-a^3\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)dt - a^3\int_0^{2\pi}(1 - \cos t)^2 d(1 - \cos t) =$$

$$= 2\pi a^3 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\pi - a^3\left(\frac{3}{4}t^2 + 2\cos t - \frac{1}{8}\cos 2t\right)\Big|_0^{2\pi} - \frac{a^3}{3}(1 - \cos t)^3\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 6\pi^2 a^3 - \frac{3}{4}a^3 \cdot 4\pi^2 - 0 = 3\pi^2 a^3$$

Найдем координаты центра тяжести заданной пластины:

$$x_C = \frac{S_y}{m} = \frac{3\pi^2 a^3}{3\pi a^2} = \pi a$$

$$y_C = \frac{S_x}{m} = \frac{\frac{5}{2}\pi a^3}{3\pi a^2} = \frac{5}{6}a$$

Ответ. Центр тяжести заданной пластины: $(\pi a;\ \ 5a/6)$.