

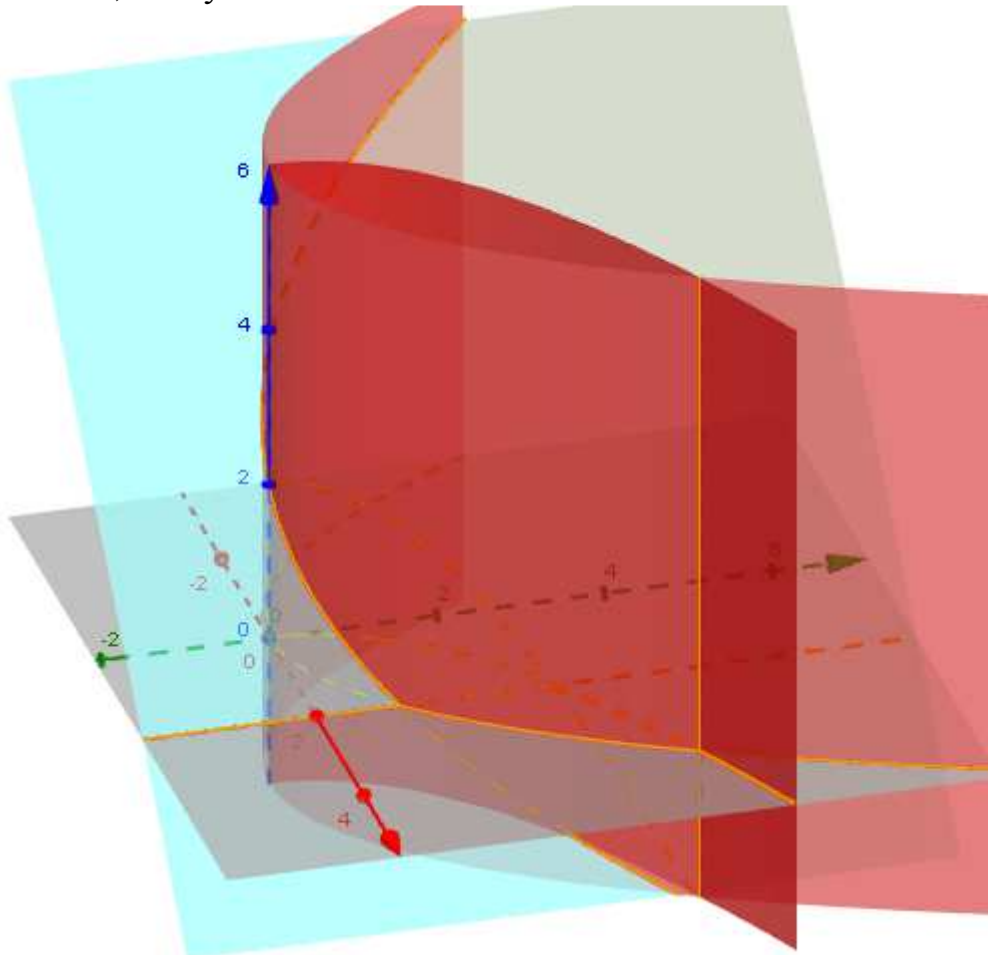
Пример решения задачи: объем тела через тройной интеграл

ЗАДАНИЕ.

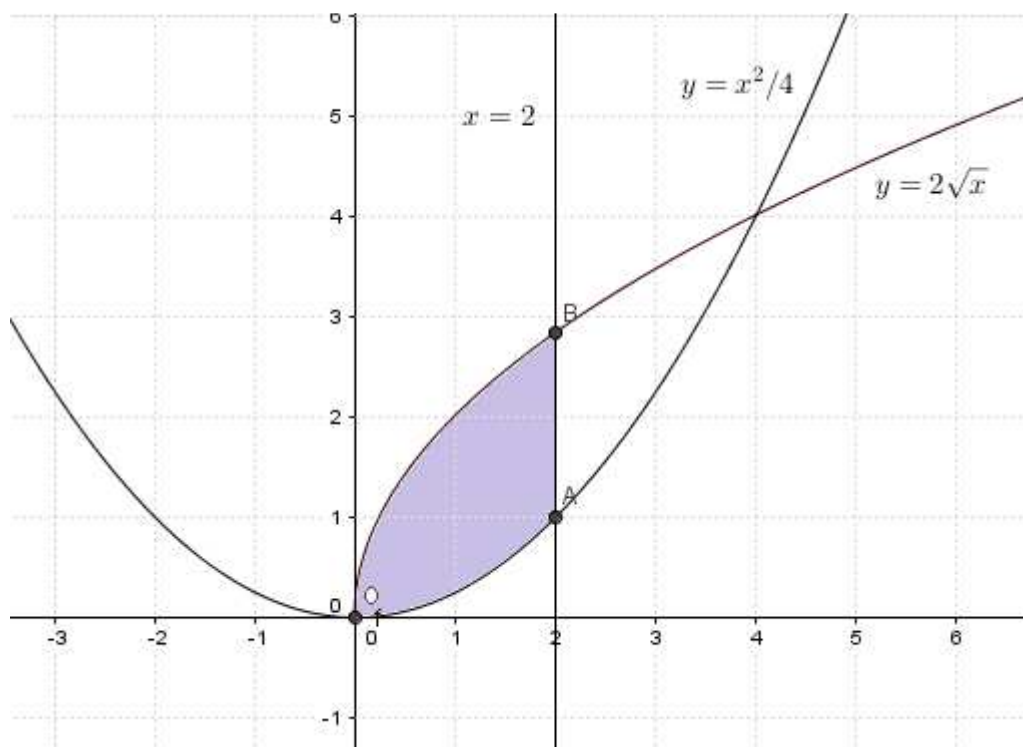
Вычислить тройным интегрированием объем тела, ограниченного данными поверхностями:

$$z = 2 - x, \quad z = 0, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad y = \frac{1}{4}x^2$$

РЕШЕНИЕ. Заданное цилиндрическое тело ограничено сверху плоскостью $z = 2 - x$, снизу - плоскостью $z = 0$:



Его проекция на плоскость Oxy - фигура, ограниченная линиями $2 - x = 0, y = 2\sqrt{x}, y = \frac{1}{4}x^2$:



$$AOB: \begin{cases} \frac{x^2}{4} \leq y \leq 2\sqrt{x} \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Тогда искомое тело задается неравенствами:

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq 2 - x \\ \frac{x^2}{4} \leq y \leq 2\sqrt{x} \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Объем тела равен:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 dx \int_{x^2/4}^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{2-x} dz = \int_0^2 dx \int_{x^2/4}^{2\sqrt{x}} \left(z \Big|_0^{2-x} \right) dy = \int_0^2 dx \int_{x^2/4}^{2\sqrt{x}} (2-x) dy = \\ &= \int_0^2 \left((2-x)y \Big|_{x^2/4}^{2\sqrt{x}} \right) dx = \int_0^2 \left((2-x) \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4} \right) \right) dx \\ &= \int_0^2 \left(4x^{1/2} - 2x^{3/2} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 \right) dx = \\ &= \left(4 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} - 2 \cdot \frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{16} x^4 \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3} \cdot 2\sqrt{2} - \frac{4}{5} \cdot 4\sqrt{2} - \frac{8}{6} + \frac{16}{16} \\ &= \frac{32\sqrt{2}}{15} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Решение задачи по тройным интегралам скачано с
https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=ma3int

(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

ОТВЕТ.

$$V = \frac{32\sqrt{2}}{15} - \frac{1}{3}$$