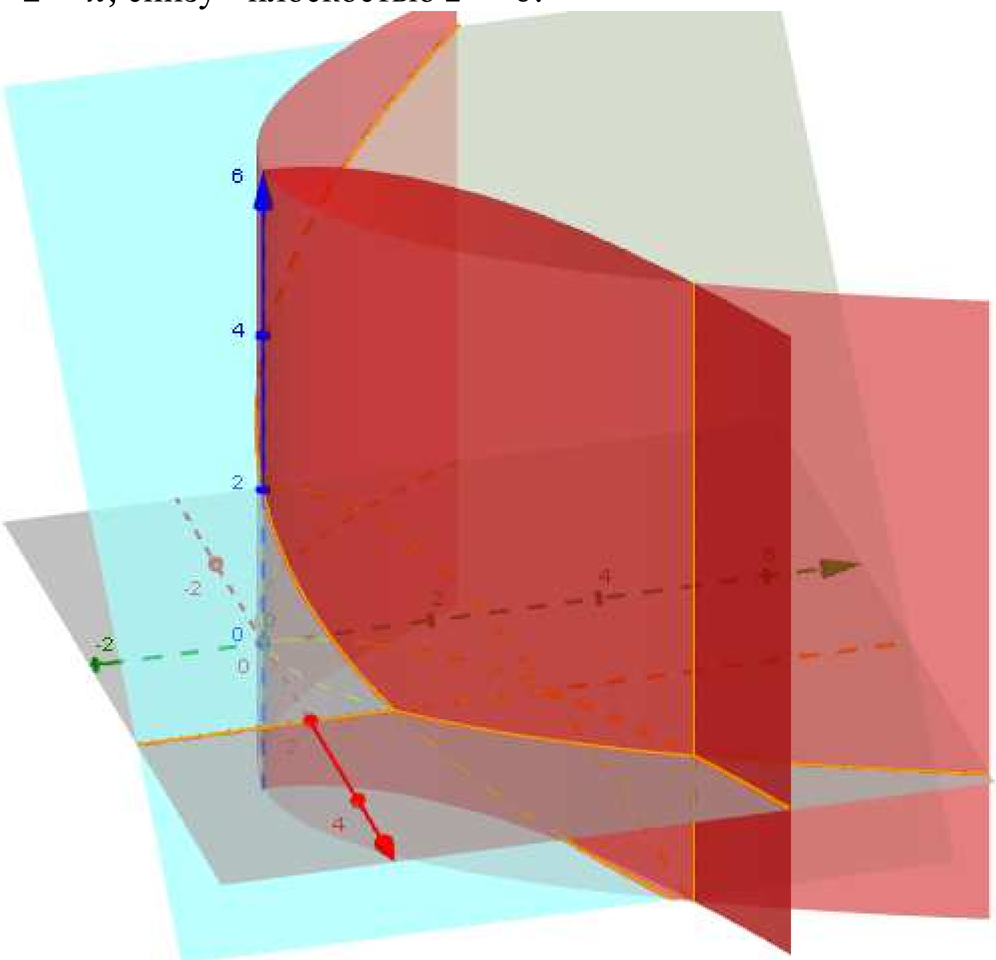
Пример решения задачи: объем тела через тройной интеграл

Задание.

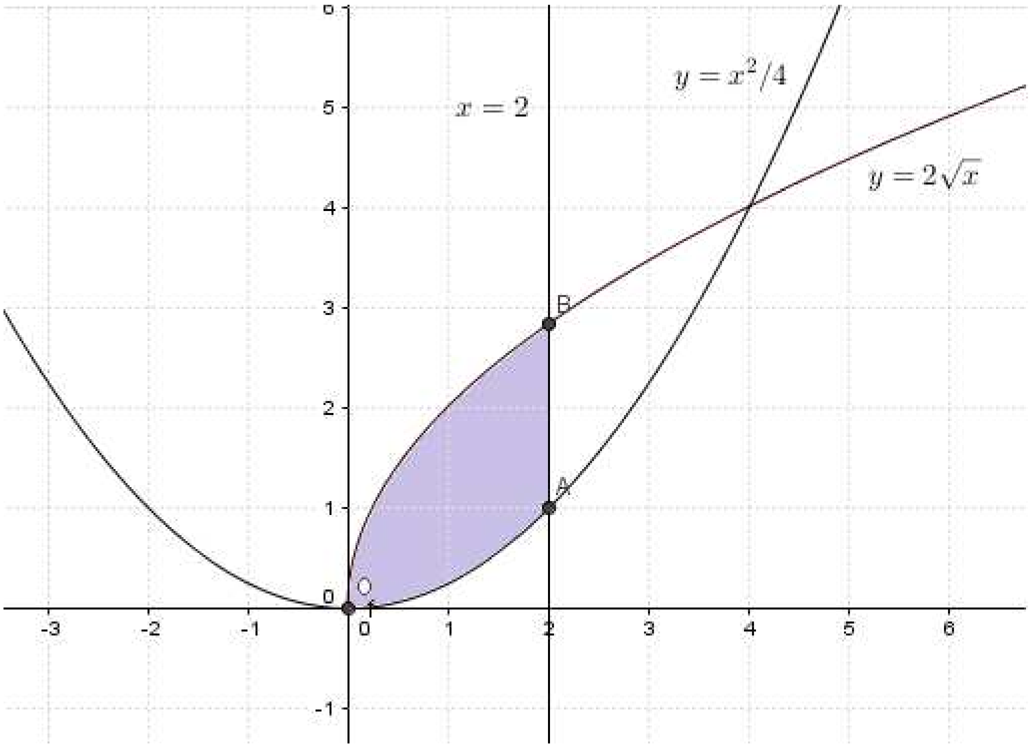
Вычислить тройным интегрированием объем тела, ограниченного данными поверхностями:

$$z = 2 - x, \qquad z = 0, \qquad y = 2\sqrt{x}, \qquad y = \frac{1}{4}x^2$$

Решение. Заданное цилиндрическое тело ограничено сверху плоскостью $z = 2 - x$, снизу - плоскостью $z = 0$:



Его проекция на плоскость Oxy - фигура, ограниченная линиями $2 - x = 0, y = 2\sqrt{x},\ y = \frac{1}{4}x^2$:



$$AOB: \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} \le y \le 2\sqrt{x} \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

Тогда искомое тело задается неравенствами:

$$\begin{cases} 0 \le z \le 2 - x \\ \dfrac{x^2}{4} \le y \le 2\sqrt{x} \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

Объем тела равен:

$$V = \int_0^2 dx \int_{x^2/4}^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{2-x} dz = \int_0^2 dx \int_{x^2/4}^{2\sqrt{x}} \left(z \Big|_0^{2-x} \right) dy = \int_0^2 dx \int_{x^2/4}^{2\sqrt{x}} (2-x) dy =$$

$$= \int_0^2 \left((2-x) y \Big|_{x^2/4}^{2\sqrt{x}} \right) dx = \int_0^2 \left((2-x)\left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right) \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(4x^{1/2} - 2x^{3/2} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 \right) dx =$$

$$= \left(4 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2 \cdot \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{16}x^4 \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3} \cdot 2\sqrt{2} - \frac{4}{5} \cdot 4\sqrt{2} - \frac{8}{6} + \frac{16}{16}$$

$$= \frac{32\sqrt{2}}{15} - \frac{1}{3}$$

ОТВЕТ.

$$V = \frac{32\sqrt{2}}{15} - \frac{1}{3}$$