Пример решения задачи: тройной интеграл в сферических координатах

Задание.

Переходя к сферическим координатам, вычислить интеграл

$$\iiint\limits_V x^2 dxdydz, \qquad V:\ x^2+y^2+z^2=R^2, \qquad z\ge 0, \qquad x>0$$

Решение.

Перейдем к сферическим координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Якобиан такой замены $J = r^2\sin\theta$, то есть $dxdydz = r^2\sin\theta\ drd\varphi d\theta$.

Уравнение $x^2+y^2+z^2=R^2$ примет вид $r=R$, поэтому $0\le r\le R$. Из условия $z\ge 0$ получим $\cos\theta\ge 0$, откуда $0\le\theta\le\pi/2$. Из условия $x>0$ получим $\cos\varphi\sin\theta>0$. Так как $0\le\theta\le\pi/2$, то $\sin\theta>0$, тогда $\cos\varphi>0$, и $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

Итак, область интегрирования:

$$V:\ \begin{cases} 0\le r\le R \\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Интеграл примет вид:

$$\iiint\limits_V x^2 dxdydz = \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^R (r\cos\varphi\sin\theta)^2\cdot r^2\sin\theta\, dr =$$

$$=\int_{0}^{\pi/2} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{0}^{R} \cos^2\varphi \sin^3\theta \cdot r^4 dr$$

$$=\int_{0}^{\pi/2} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos^2\varphi \sin^3\theta \cdot \frac{1}{5} r^5 \Big|_0^R\right) d\varphi =$$

$$=\int_{0}^{\pi/2} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos^2\varphi \sin^3\theta \cdot \frac{1}{5} R^5\right) d\varphi$$

$$=\frac{R^5}{5}\int_{0}^{\pi/2} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\sin^3\theta \cdot \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)\right) d\varphi =$$

$$=\frac{R^5}{10}\int_{0}^{\pi/2} \left(\sin^3\theta \left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right) d\theta$$

$$=\frac{R^5}{10}\int_{0}^{\pi/2} \left(\sin^3\theta \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi\right)\right) d\theta =$$

$$=\frac{\pi R^5}{10}\int_{0}^{\pi/2} \sin^3\theta \, d\theta = \frac{\pi R^5}{10}\int_{0}^{\pi/2} (-\sin^2\theta)\cdot(-\sin\theta) d\theta$$

$$=\frac{\pi R^5}{10}\int_{0}^{\pi/2} (\cos^2\theta - 1) d(\cos\theta) =$$

$$=\frac{\pi R^5}{10}\left(\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^5}{10}\left(\frac{1}{3}\cos^3\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\cos^3 0 + \cos 0\right)$$

$$=\frac{\pi R^5}{10}\left(1 - \frac{1}{3}\right) =$$

$$=\frac{\pi R^5}{10}\cdot\frac{2}{3} = \frac{\pi R^5}{15}$$

ОТВЕТ. $\frac{\pi R^5}{15}$