

### Пример решения задачи: тройной интеграл в сферических координатах

ЗАДАНИЕ.

Переходя к сферическим координатам, вычислить интеграл

$$\iiint_V x^2 dx dy dz, \quad V: x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z \geq 0, \quad x > 0$$

РЕШЕНИЕ.

Перейдем к сферическим координатам:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Якобиан такой замены  $J = r^2 \sin \theta$ , то есть  $dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$ .

Уравнение  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  примет вид  $r = R$ , поэтому  $0 \leq r \leq R$ . Из условия  $z \geq 0$  получим  $\cos \theta \geq 0$ , откуда  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ . Из условия  $x > 0$  получим  $\cos \varphi \sin \theta > 0$ . Так как  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , то  $\sin \theta > 0$ , тогда  $\cos \varphi > 0$ , и  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .

Итак, область интегрирования:

$$V: \begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Интеграл примет вид:

$$\iiint_V x^2 dx dy dz = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^R (r \cos \varphi \sin \theta)^2 \cdot r^2 \sin \theta dr =$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^R \cos^2 \varphi \sin^3 \theta \cdot r^4 dr \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \cos^2 \varphi \sin^3 \theta \cdot \frac{1}{5} r^5 \Big|_0^R \right) d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \cos^2 \varphi \sin^3 \theta \cdot \frac{1}{5} R^5 \right) d\varphi \\ &= \frac{R^5}{5} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \sin^3 \theta \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) \right) d\varphi = \\ &= \frac{R^5}{10} \int_0^{\pi/2} \left( \sin^3 \theta \left( \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) d\theta \\ &= \frac{R^5}{10} \int_0^{\pi/2} \left( \sin^3 \theta \left( \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi \right) \right) d\theta = \\ &= \frac{\pi R^5}{10} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta = \frac{\pi R^5}{10} \int_0^{\pi/2} (-\sin^2 \theta) \cdot (-\sin \theta) d\theta \\ &= \frac{\pi R^5}{10} \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \theta - 1) d(\cos \theta) = \\ &= \frac{\pi R^5}{10} \left( \frac{1}{3} \cos^3 \theta - \cos \theta \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^5}{10} \left( \frac{1}{3} \cos^3 \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \cos^3 0 + \cos 0 \right) \\ &= \frac{\pi R^5}{10} \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = \\ &= \frac{\pi R^5}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\pi R^5}{15} \end{aligned}$$

Решение задачи по тройным интегралам скачано с  
[https://www.matburo.ru/ex\\_ma.php?p1=ma3int](https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=ma3int)

(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

ОТВЕТ.  $\frac{\pi R^5}{15}$