Пример решения задачи: объем через тройной интеграл

ЗАДАНИЕ.

Найти объем тела, ограниченного координатными плоскостями и поверхностью

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^3 = \sin\left(\pi\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}\right)$$

РЕШЕНИЕ.

Сделаем замену координат:

$$x = ar\cos^2\varphi\sin^2\theta$$
$$y = br\sin^2\varphi\sin^2\theta$$
$$z = cr\cos^2\theta$$

Якобиан такой замены:

$$J = \begin{vmatrix} a\cos^2\varphi\sin^2\theta & -2ar\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta & 2ar\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta \\ b\sin^2\varphi\sin^2\theta & 2br\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta & 2br\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta \\ c\cos^2\theta & 0 & -2cr\ \sin\theta\cos\theta \end{vmatrix} =$$
$$= -4abc\sin\varphi\cos\varphi\sin^3\theta\cos\theta$$

Уравнение поверхности примет вид:

$$(r\cos^2\varphi\sin^2\theta + r\sin^2\varphi\sin^2\theta + r\cos^2\theta)^3$$
$$= \sin\left(\pi\frac{r\cos^2\varphi\sin^2\theta + r\sin^2\varphi\sin^2\theta}{r\cos^2\varphi\sin^2\theta + r\sin^2\varphi\sin^2\theta + r\cos^2\theta}\right)$$
$$r^3 = \sin(\pi\sin^2\theta)$$

Область интегрирования:

$$\begin{cases} 0 \le r \le \sqrt[3]{\sin(\pi\sin^2\theta)} \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Искомый объем:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt[3]{\sin(\pi\sin^2\theta)}} 4abcr^2\sin\varphi\cos\varphi\sin^3\theta\cos\theta\, dr$$

$$\int_0^{\sqrt[3]{\sin(\pi\sin^2\theta)}} 4abcr^2 \sin\varphi\cos\varphi\sin^3\theta\cos\theta\,dr$$

$$= \frac{4}{3}abc\sin\varphi\cos\varphi\sin^3\theta\cos\theta\cdot r^3\Big|_0^{\sqrt[3]{\sin(\pi\sin^2\theta)}} =$$

$$= \frac{4}{3}abc\sin\varphi\cos\varphi\sin^3\theta\cos\theta\sin(\pi\sin^2\theta)$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{4}{3}abc\sin\varphi\cos\varphi\sin^3\theta\cos\theta\sin(\pi\sin^2\theta)\,d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}abc\sin^3\theta\cos\theta\sin(\pi\sin^2\theta)\int_0^{\pi/2}\sin 2\varphi\,d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{3}abc\sin^3\theta\cos\theta\sin(\pi\sin^2\theta)\cos 2\varphi\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{2}{3}abc\sin^3\theta\cos\theta\sin(\pi\sin^2\theta)$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{2}{3}abc\sin^3\theta\cos\theta\sin(\pi\sin^2\theta)\,d\theta = \begin{vmatrix} t=\sin\theta \\ dt=\cos\theta\,d\theta\end{vmatrix} = \frac{2}{3}abc\int_0^1 t^3\sin\pi t^2\,dt$$

$$=$$

$$= \begin{vmatrix} u=t^2 & dv = t\sin\pi t^2\,dt \\ du = 2tdt & v = -\dfrac{1}{2\pi}\cos\pi t^2\end{vmatrix}$$

$$= \frac{2}{3}abc\cdot\left(-\frac{t^2}{2\pi}\cos\pi t^2\right)\Big|_0^1 + \frac{2}{3}abc\int_0^1\frac{t}{2\pi}\cos\pi t^2\,dt =$$

$$= \frac{2}{3}abc\cdot\frac{1}{2\pi} + \frac{2}{3}abc\int_0^1\frac{1}{4\pi^2}\cos\pi t^2\,d(\cos\pi t^2)$$

$$= \frac{abc}{3\pi} + \frac{2}{3}abc\cdot\frac{1}{4\pi^2}\cdot\frac{\cos^2\pi t^2}{2}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{abc}{3\pi} + \frac{2}{3}abc\cdot\frac{1}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{2}(\cos^2\pi - \cos^2 1) = \frac{abc}{3\pi}$$

ОТВЕТ. $V = \frac{abc}{3\pi}$