

### Пример решения задачи: объем через тройной интеграл

ЗАДАНИЕ.

Найти объем тела, ограниченного координатными плоскостями и поверхностью

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^3 = \sin\left(\pi \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}}\right)$$

РЕШЕНИЕ.

Сделаем замену координат:

$$\begin{aligned}x &= ar \cos^2 \varphi \sin^2 \theta \\y &= br \sin^2 \varphi \sin^2 \theta \\z &= cr \cos^2 \theta\end{aligned}$$

Якобиан такой замены:

$$\begin{aligned}J &= \begin{vmatrix} a \cos^2 \varphi \sin^2 \theta & -2ar \cos \varphi \sin \varphi \sin^2 \theta & 2ar \cos^2 \varphi \sin \theta \cos \theta \\ b \sin^2 \varphi \sin^2 \theta & 2br \cos \varphi \sin \varphi \sin^2 \theta & 2br \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta \\ c \cos^2 \theta & 0 & -2cr \sin \theta \cos \theta \end{vmatrix} = \\ &= -4abc \sin \varphi \cos \varphi \sin^3 \theta \cos \theta\end{aligned}$$

Уравнение поверхности примет вид:

$$\begin{aligned}(r \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + r \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + r \cos^2 \theta)^3 \\ = \sin\left(\pi \frac{r \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + r \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + r \cos^2 \theta}{r \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + r \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + r \cos^2 \theta}\right) \\ r^3 = \sin(\pi \sin^2 \theta)\end{aligned}$$

Область интегрирования:

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt[3]{\sin(\pi \sin^2 \theta)} \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Искомый объем:

$$V = \iiint_V dx dy dz = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt[3]{\sin(\pi \sin^2 \theta)}} 4abc r^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin^3 \theta \cos \theta dr$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\sqrt[3]{\sin(\pi \sin^2 \theta)}} 4abc r^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin^3 \theta \cos \theta dr \\
 &= \frac{4}{3} abc \sin \varphi \cos \varphi \sin^3 \theta \cos \theta \cdot r^3 \Big|_0^{\sqrt[3]{\sin(\pi \sin^2 \theta)}} = \\
 &= \frac{4}{3} abc \sin \varphi \cos \varphi \sin^3 \theta \cos \theta \sin(\pi \sin^2 \theta) \\
 & \int_0^{\pi/2} \frac{4}{3} abc \sin \varphi \cos \varphi \sin^3 \theta \cos \theta \sin(\pi \sin^2 \theta) d\varphi = \\
 &= \frac{2}{3} abc \sin^3 \theta \cos \theta \sin(\pi \sin^2 \theta) \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi d\varphi = \\
 &= -\frac{1}{3} abc \sin^3 \theta \cos \theta \sin(\pi \sin^2 \theta) \cos 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} \\
 &= \frac{2}{3} abc \sin^3 \theta \cos \theta \sin(\pi \sin^2 \theta) \\
 & \int_0^{\pi/2} \frac{2}{3} abc \sin^3 \theta \cos \theta \sin(\pi \sin^2 \theta) d\theta = \Big|_{dt = \cos \theta d\theta}^{t = \sin \theta} = \frac{2}{3} abc \int_0^1 t^3 \sin \pi t^2 dt \\
 &= \\
 &= \left| \begin{array}{l} u = t^2 \quad dv = t \sin \pi t^2 dt \\ du = 2t dt \quad v = -\frac{1}{2\pi} \cos \pi t^2 \end{array} \right| \\
 &= \frac{2}{3} abc \cdot \left( -\frac{t^2}{2\pi} \cos \pi t^2 \right) \Big|_0^1 + \frac{2}{3} abc \int_0^1 \frac{t}{2\pi} \cos \pi t^2 dt = \\
 &= \frac{2}{3} abc \cdot \frac{1}{2\pi} + \frac{2}{3} abc \int_0^1 \frac{1}{4\pi^2} \cos \pi t^2 d(\cos \pi t^2) \\
 &= \frac{abc}{3\pi} + \frac{2}{3} abc \cdot \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{\cos^2 \pi t^2}{2} \Big|_0^1 = \\
 &= \frac{abc}{3\pi} + \frac{2}{3} abc \cdot \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{2} (\cos^2 \pi - \cos^2 1) = \frac{abc}{3\pi}
 \end{aligned}$$

Решение задачи по тройным интегралам скачано с  
[https://www.matburo.ru/ex\\_ma.php?p1=ma3int](https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=ma3int)

(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

ОТВЕТ.  $V = \frac{abc}{3\pi}$