Задача с решением по численным методам
Тема: численное решение краевой задачи

Задание.

Методом конечных разностей найти решение краевой задачи

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y(a) = ya, \quad y(b) = yb \end{cases}$$

с шагами $h_1 = (b-a)/5$, $h_2 = (b-a)/10$ *и оценить погрешность по правилу Рунге. Построить графики полученных приближенных решений.*

Таблица к задаче 1

№	$p(x)$	$q(x)$	$f(x)$	a	b	ya	yb
11	$0.4x^2$	5x	10	0	1	-2	2

Решение.

Решим задачу с шагом $h_1 = \frac{1-0}{5} = 0.2$. Разобьем отрезок $[0; 1]$ на пять интервалов длиной $h = 0.2$ точками $x_1 = x_0 + h = 0 + 0.2 = 0.2$; $x_2 = x_1 + h = 0.4$; $x_3 = 0.6$; $x_4 = 0.8$; $x_5 = 1$.
Заменим в выражении

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

производные на их конечно-разностные аппроксимации:

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

$$y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

Получим:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{0.04} + p(x)\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{0.4} + q(x)y_i = f(x_i)$$

Упростим:

$$\left(25 - 2.5p(x_i)\right) y_{i-1} + (q(x_i) - 50)y_i + \left(25 + 2.5p(x_i)\right) y_{i+1} = f(x_i)$$

Для $i = 0$ из условия имеем $x_0 = 0$; $y(x_0) = -2$.
Для $i = 1..4$:

i	x	$p(x) = 0{,}4x^2$	$q(x) = 5x$	$f(x) = 10$
1	0,2	0,016	1	10
2	0,4	0,064	2	10
3	0,6	0,144	3	10
4	0,8	0,256	4	10

Получим 4 линейных уравнения относительно $y_0, y_1, \dots, y_5$:
$i = 1$:

$$(25 - 2.5 \cdot 0.016)\, y_0 + (1 - 50)y_1 + (25 + 2.5 \cdot 0.016)\, y_2 = 10$$
$$24.96y_0 - 49y_1 + 25.04y_2 = 10$$

$i = 2$:

$$(25 - 2.5 \cdot 0.064)\, y_1 + (2 - 50) y_2 + (25 + 2.5 \cdot 0.064)\, y_3 = 10$$
$$24.84 y_1 - 48 y_2 + 25.16 y_3 = 10$$

$i = 3$:

$$(25 - 2.5 \cdot 0.144)\, y_2 + (3 - 50) y_3 + (25 + 2.5 \cdot 0.144)\, y_4 = 10$$
$$24.64 y_2 - 47 y_3 + 25.36 y_4 = 10$$

$i = 4$:

$$(25 - 2.5 \cdot 0.256)\, y_3 + (4 - 50) y_4 + (25 + 2.5 \cdot 0.256)\, y_5 = 10$$
$$24.36 y_3 - 46 y_4 + 25.64 y_5 = 10$$

Для $i = 5$ из условия имеем $x_5 = 1; y(x_5) = 2$

Итак, имеем систему из 6 линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = -2 \\ 24.96 y_0 - 49 y_1 + 25.04 y_2 = 10 \\ 24.84 y_1 - 48 y_2 + 25.16 y_3 = 10 \\ 24.64 y_2 - 47 y_3 + 25.36 y_4 = 10 \\ 24.36 y_3 - 46 y_4 + 25.64 y_5 = 10 \\ y_5 = 2 \end{cases}$$

Будем решать систему методом прогонки. Первое уравнение уже разрешено относительно y_0. Подставим во второе уравнение y_0, получим:

$$-49 y_1 + 25.04 y_2 = 59.92$$

Выразим y_1:

$$y_1 = 0.51102 y_2 - 1.22286$$

Подставим y_1 во второе уравнение, упростим, после чего выразим y_2. Аналогично поступим с остальными уравнениями. Система примет вид:

$$\begin{cases} y_0 = -2 \\ y_1 = 0.51102 y_2 - 1.22286 \\ y_2 = 0.71262 y_3 - 1.14359 \\ y_3 = 0.86138 y_4 - 1.29676 \\ y_4 = 1.02492 y_5 - 1.66246 \\ y_5 = 2 \end{cases}$$

Теперь проведем обратный ход метода прогонки. Последнее уравнение разрешено относительно неизвестной y_5. Подставим $y_5 = 2$ в пятое уравнение, получим

$$y_4 = 1.02492 \cdot 2 - 1.66246 = 0.38738$$

Аналогично поступим с остальными уравнениями. Получим решение:

x_i	y_i
0	-2,00000
0.2	-2,15797
0.4	-1,82990
0.6	-0,96308
0.8	0,38738
1	2,00000

Теперь решим задачу с шагом $h_1 = \frac{1-0}{5} = 0.1$. Разобьем отрезок $[0; 1]$ на пять интервалов длиной $h = 0.1$ точками $x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1; x_2 = x_1 + h = 0.2; x_3 = 0.3; \dots ; x_9 = 0.9; x_{10} = 1.$

Заменим в выражении

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

производные на их конечно-разностные аппроксимации:

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

$$y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

Получим:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{0.01} + p(x)\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{0.2} + q(x)y_i = f(x_i)$$

Упростим:

$$\big(100 - 5p(x_i)\big)\, y_{i-1} + (q(x_i) - 200)y_i + \big(100 + 5p(x_i)\big)\, y_{i+1} = f(x_i)$$

Для $i = 0$ из условия имеем $x_0 = 0; y(x_0) = -2.$

Для $i = 1..9$:

i	x	$p(x) = 0{,}4x^2$	$q(x) = 5x$	$f(x) = 10$
1	0,1	0,004	0,5	10
2	0,2	0,016	1	10
3	0,3	0,036	1,5	10
4	0,4	0,064	2	10
5	0,5	0,1	2,5	10
6	0,6	0,144	3	10
7	0,7	0,196	3,5	10
8	0,8	0,256	4	10
9	0,9	0,324	4,5	10

Подставляя в $\big(100 - 5p(x_i)\big)\, y_{i-1} + (q(x_i) - 200)y_i + \big(100 + 5p(x_i)\big)\, y_{i+1} = f(x_i)$ значения $p(x_i), q(x_i), f(x_i)$, получим 9 уравнений относительно неизвестных $y_0, y_1, \dots, y_{10}$

$$\begin{gathered}
99.98y_0 - 199.5y_1 + 100.02y_2 = 10 \\
99.92y_1 - 199.0y_2 + 100.08y_3 = 10 \\
99.82y_2 - 198.5y_3 + 100.18y_4 = 10 \\
99.68y_3 - 198.0y_4 + 100.32y_5 = 10 \\
99.50y_4 - 197.5y_5 + 100.50y_6 = 10 \\
99.28y_5 - 197.0y_6 + 100.72y_7 = 10 \\
99.02y_6 - 196.5y_7 + 100.98y_8 = 10 \\
98.72y_7 - 196.0y_8 + 101.28y_9 = 10 \\
98.38y_8 - 195.5y_9 + 101.62y_{10} = 10
\end{gathered}$$

Для $i = 10$ из условия имеем $x_{10} = 1; y(x_{10}) = 2$

Итак, имеем систему из 10 уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = -2 \\ 99.98y_0 - 199.5y_1 + 100.02y_2 = 10 \\ 99.92y_1 - 199.0y_2 + 100.08y_3 = 10 \\ 99.82y_2 - 198.5y_3 + 100.18y_4 = 10 \\ 99.68y_3 - 198.0y_4 + 100.32y_5 = 10 \\ 99.50y_4 - 197.5y_5 + 100.50y_6 = 10 \\ 99.28y_5 - 197.0y_6 + 100.72y_7 = 10 \\ 99.02y_6 - 196.5y_7 + 100.98y_8 = 10 \\ 98.72y_7 - 196.0y_8 + 101.28y_9 = 10 \\ 98.38y_8 - 195.5y_9 + 101.62y_{10} = 10 \\ y_{10} = 2 \end{cases}$$

После прямого хода метода прогонки система примет вид:

$$\begin{cases} y_0 = -2 \\ y_1 = 0.50135y_2 - 1.05243 \\ y_2 = 0.67211y_3 - 0.77337 \\ y_3 = 0.76235y_4 - 0.66356 \\ y_4 = 0.82223y_5 - 0.62408 \\ y_5 = 0.86872y_6 - 0.62319 \\ y_6 = 0.90940y_7 - 0.64892 \\ y_7 = 0.94861y_8 - 0.69756 \\ y_8 = 0.98951y_9 - 0.77050 \\ y_9 = 1.03533y_{10} - 0.87417 \\ y_{10} = -2 \end{cases}$$

После обратного хода метода прогонки получим:

x_i	y_i
0	-2
0,1	-2,12572
0,2	-2,14079
0,3	-2,03452
0,4	-1,79836
0,5	-1,42816
0,6	-0,92662
0,7	-0,30536
0,8	0,41345
0,9	1,19650
1	2

Оценим погрешность по правилу Рунге: формула

$$\frac{\left|y_i(h) - y_i\left(\frac{h}{2}\right)\right|}{2^p - 1}$$

дает погрешность решения с шагом $\frac{h}{2}$. Под p понимается порядок точности численного метода. В данном случае $p = 2$, то есть погрешность:

$$\frac{\left|y_i(h) - y_i\left(\frac{h}{2}\right)\right|}{2^p - 1} = \frac{\left|y_i(h) - y_i\left(\frac{h}{2}\right)\right|}{3}$$

x	y для $h = 0.1$	y для $h = 0.2$	Погрешность
0	-2	-2	0
0,1	-2,12572		
0,2	-2,14079	-2,15797	0,005727
0,3	-2,03452		
0,4	-1,79836	-1,8299	0,010515
0,5	-1,42816		
0,6	-0,92662	-0,96308	0,012155
0,7	-0,30536		
0,8	0,413447	0,387376	0,00869
0,9	1,196496		
1	2	2	0

Построим оба решения: