Задача с решением по численным методам
Тема: отделение и уточнение корней нелинейных уравнений

ЗАДАНИЕ.

Отделить корни нелинейного уравнения аналитически и уточнить один из них методом проб с точностью до 0,01. $3x^4-8x^3-18x^2+2=0$.

РЕШЕНИЕ.

Обозначим $f(x)=3x^4-8x^3-18x^2+2$. Находим производную $f'(x)=12x^3-24x^2-36x$.

Вычислим корень производной:

$12x(x^2-2x-3)=0$;

$12x(x+1)(x-3)=0$;

$x_1=0, x_2=-1, x_3=3$.

Составим таблицу знаков функции $f(x)$, полагая x равным: а) критическим значениям функции (корням производной) или близким к ним; б) граничным значениям (исходя из области допустимых значений неизвестного).

x	-∞	–1	0	3	+∞
sign f(x)	+	–	+	–	+

Так как происходят четыре перемены знака функции, то уравнение имеет четыре действительных корня. Чтобы завершить операцию отделения корней, следует уменьшить промежутки, содержащие корни, так чтобы их длина была не больше 1. Для этого составим новую таблицу знаков функции f(x):

x	–2	–1	0	1	4	5
sign f(x)	+	–	+	–	–	+

Отсюда видно, что корни заключены в следующих промежутках: $x_1\in[-2;-1]$; $x_2\in[-1;0]$, $x_3\in[0;1]$, $x_4\in[4;5]$.

Уточним один из корней, например $x_1\in[-2;-1]$, методом проб до сотых долей. Все вычисления удобно производить, используя следующую таблицу:

n	a_n^{+}	b_n^{-}	$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	$3x^4{}_n$	$-8x^3{}_n$	$-18x^2{}_n$	$f(x_n)$
0	–2	–1	–1,5	15,1875	27	-40,5	3,6875
1	–1,5	–1	–1,25	7,3242	15,625	-28,125	–3,17578
2	–1,5	–1,25	–1,38	10,88	21,0245	–34,2792	–0,37441
3	–1,5	–1,38	–1,44	12,899	23,887	–37,3248	1,4625
4	–1,38	–1,44	–1,41	11,85	22,43	–35,79	0,4975
5	–1,38	–1,41	–1,4	11,52	21,95	–35,28	0,1968
6	–1,38	–1,4	–1,39	11,2	21,5	-34,8	–0,0938

Ответ: $x_1 \approx -1{,}39$.