

Задача с решением по численным методам
Тема: погрешности вычислений

ЗАДАНИЕ.

Дана функция $f(a, b, c)$. Значения переменных указаны в варианте со всеми верными цифрами. Оценить погрешность результата, используя:

a) оценки погрешностей для арифметических операций;

b) общую формулу погрешностей.

Результат представить в двух формах записи: с явным указанием погрешностей и с учетом верных цифр.

№	$f(a, b, c)$	a	b	c
11	$\frac{ab^3}{c}$	0.643	2.17	5.843

РЕШЕНИЕ.

Значащую цифру называют верной в широком смысле, если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, соответствующего этой цифре. Таким образом, так как значения переменных указаны в варианте со всеми верными цифрами, то будем считать, что

$$\Delta_a < 0.001; \Delta_b < 0.01; \Delta_c < 0.001$$

Погрешность умножения чисел $(x \pm \Delta_x), (y \pm \Delta_y)$:

$$\Delta_z = |x|\Delta_y + |y|\Delta_x + \Delta_x\Delta_y$$

Погрешность деления чисел $(x \pm \Delta_x), (y \pm \Delta_y)$

$$\Delta_z \approx \frac{|x|\Delta_y + |y|\Delta_x}{y^2}$$

Оценим погрешность произведения b^2 по правилу оценки погрешности произведения ($b^2 = b \cdot b$)

$$\begin{aligned} \Delta_{b^2} &= |b|\Delta_b + |b|\Delta_b + \Delta_b\Delta_b \\ |b|\Delta_b + |b|\Delta_b + \Delta_b\Delta_b &= 2|b|\Delta_b + (\Delta_b)^2 = 2 \cdot 2.17 \cdot 0.01 + (0.01)^2 = 0.0435 \end{aligned}$$

$$\Delta_{b^2} < 0.0435$$

Оценим погрешность произведения b^3 по правилу оценки погрешности произведения ($b^3 = b^2 \cdot b$)

$$\begin{aligned} \Delta_{b^3} &= |b^2|\Delta_b + |b|\Delta_{b^2} + \Delta_b\Delta_{b^2} \\ |b^2|\Delta_b + |b|\Delta_{b^2} + \Delta_b\Delta_{b^2} &= 2.17^2 \cdot 0.01 + 2.17 \cdot 0.0435 + 0.01 \cdot 0.0435 = 0.141919 \end{aligned}$$

$$\Delta_{b^3} < 0.141919$$

Оценим погрешность произведения ab^3 по правилу оценки погрешности произведения

$$\Delta_{ab^3} = |a|\Delta_{b^3} + |b^3|\Delta_a + \Delta_a\Delta_{b^3}$$

$$|a|\Delta_{b^3} + |b^3|\Delta_a + \Delta_a\Delta_{b^3} = 0.643 \cdot 0.141919 + 2.17^3 \cdot 0.001 + 0.001 \cdot 0.141919 =$$

$$= 0.101614149$$

$$\Delta_{ab^3} < 0.101614149$$

Оценим погрешность частного $z = \frac{ab^3}{c}$ по правилу оценки погрешности частного:

$$\Delta_z \approx \frac{|ab^3|\Delta_c + |c|\Delta_{ab^3}}{c^2}$$

$$\frac{|ab^3|\Delta_c + |c|\Delta_{ab^3}}{c^2} = \frac{0.643 \cdot 2.17^3 \cdot 0.001 + 5.843 \cdot 0.101614149}{5.843^2} = 0.01758319966$$

$$\Delta_z < 0.01758319966$$

Таким образом, можно сказать, что погрешность при вычислении числа

$$z = \frac{ab^3}{c}$$

$$\Delta_z < 0.02$$

Оценим погрешность с помощью общей формулы погрешности. Рассмотрим z как функцию трех переменных a, b, c :

$$z = z(a, b, c) = \frac{ab^3}{c}$$

Абсолютная погрешность оценивается по формуле:

$$\Delta_z \leq \frac{\partial z}{\partial a} \cdot \Delta_a + \frac{\partial z}{\partial b} \cdot \Delta_b + \frac{\partial z}{\partial c} \cdot \Delta_c$$

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{ab^3}{c} \right) = \frac{b^3}{c} = \frac{2.17^3}{5.843}$$

$$\frac{\partial z}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{ab^3}{c} \right) = \frac{3ab^2}{c} = \frac{3 \cdot 0.643 \cdot 2.17^2}{5.843}$$

$$\frac{\partial z}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{ab^3}{c} \right) = -\frac{ab^3}{c^2} = -\frac{0.643 \cdot 2.17^3}{5.843^2}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial z}{\partial a} \cdot \Delta_a + \frac{\partial z}{\partial b} \cdot \Delta_b + \frac{\partial z}{\partial c} \cdot \Delta_c = \\ & = \frac{2.17^3}{5.843} \cdot 0.001 + \frac{3 \cdot 0.643 \cdot 2.17^2}{5.843} \cdot 0.01 - \frac{0.643 \cdot 2.17^3}{5.843^2} \cdot 0.001 \approx 0.01710226038 \end{aligned}$$

Таким образом, можно сказать, что погрешность при вычислении числа

$$z = \frac{ab^3}{c}$$

найденная с помощью общей формулы:

$$\Delta_z < 0.02$$

Так как погрешность при вычислении составляет $\Delta_z < 0.02$, то число $z = \frac{ab^3}{c}$ может быть вычислено с одним верным знаком после запятой.

Вычислим:

Задача скачана с <https://www.matburo.ru/> (еще много бесплатных примеров на сайте)
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

$$z = \frac{ab^3}{c} = \frac{0.643 \cdot 2.17^3}{5.843} \approx 1.12$$

Запишем число z с явным указанием погрешности:

$$z = 1.12 \pm 0.02$$

Запишем число z с использованием только верных цифр:

$$z = 1.1$$

ОТВЕТ. $\Delta_z < 0.02$; $z = 1.12 \pm 0.02$; $z = 1.1$