Тема: Дифференциальные уравнения

Задание. *Решить уравнение* $(x+y^2)y' = y-1$.

Решение. Данное уравнение не имеет вид линейного, однако если считать x функцией, а y — независимым переменным, то уравнение можно записать в виде

$$x'(y-1) - x = y^2, \quad x' - \frac{x}{y-1} = \frac{y^2}{y-1}. \tag{1}$$

Полученное уравнение — линейное относительно x и x'. Решим сначала однородное уравнение

$$x' - \frac{x}{y-1} = 0, \quad dx = \frac{x\,dy}{y-1}, \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y-1}, \quad \ln|x| = \ln|y-1| + \ln|C|, \quad x = C(y-1).$$

Теперь полагаем $C = C(y)$, $x(y) = C(y)(y-1)$, $x' = C'(y)(y-1) + C(y)$. Подставляем все в уравнение (1):

$$C'(y)(y-1) + C(y) - \frac{C(y)(y-1)}{y-1} = \frac{y^2}{y-1},$$

$$C'(y) = \frac{y^2}{(y-1)^2}, \quad C(y) = y - \frac{1}{y-1} + 2\ln|y-1| + C_1.$$

Получаем общее решение

$$x(y) = (y-1)\left(y - \frac{1}{y-1} + 2\ln|y-1| + C_1\right) = y^2 - y - 1 + (y-1)(2\ln|y-1| + C_1)$$

При делении на $y-1$ в (1) могло быть потеряно решение $y=1$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что это действительно решение, которое не содержится в общем ни при каком C_1. Окончательно получаем решения:

$$x(y) = y^2 - y - 1 + (y-1)(2\ln|y-1| + C_1), \quad y = 1.$$