Тема: Дифференциальные уравнения

Задание. *Решить уравнение* $y'^2 - 4xyy' + 8y^2 = 0$.

Решение. Разрешим уравнение относительно x:

$$x = \frac{y'^2}{4y} + \frac{2y}{y'} \ (y = 0?)$$

Параметризуем уравнение:

$$x = \frac{p^2}{4y} + \frac{2y}{p}, \quad y' = p.$$

Пользуясь соотношением $dy = y'\,dx$, получаем

$$dy = p\left(\left(\frac{p}{2y} - \frac{2y}{p^2}\right) dp + \left(-\frac{p^2}{4y^2} + \frac{2}{p}\right) dy\right),$$

$$\left(\frac{p^2}{2y} - \frac{2y}{p}\right) dp + \left(-\frac{p^3}{4y^2} + 1\right) dy = 0,$$

$$\frac{p^3 - 4y^2}{2py}\,dp + \frac{-p^3 + 4y^2}{4y^2}\,dy = 0.$$

Выносим общий множитель за скобку и получаем

$$\frac{p^3 - 4y^2}{2y}\left(\frac{dp}{p} - \frac{dy}{2y}\right) = 0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$\frac{dp}{p} - \frac{dy}{2y} = 0 \text{ и } \frac{p^3 - 4y^2}{2y} = 0. \tag{1}$$

Первое из них дает $p = C_1\sqrt{y}$ $(y > 0)$. Подставляя это значение p в выражение для x, получаем

$$x = \frac{C_1^2}{4} + \frac{2}{C_1}\sqrt{y}, \quad \Rightarrow y = C(x - C)^2 \ (C = C_1^2/4).$$

Второе уравнение в (1) дает $p = (4y^2)^{1/3}$. Подставляя это значение p в выражение для x, получаем $y = 4/27x^3$, это особое решение. Решение $y = 0$ также будет особымм (оба этих решения являются огибающими семейства интегральных кривых).