Тема: Дифференциальные уравнения

Задание. *Решить задачу Коши*

$$2yy''+1=(y')^2,\ y(1/3)=1,\ y'(1/3)=2.$$

Решение. Сделаем замену

$$y'=p,\ y''=p'=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p,$$

уравнение примет вид

$$2yp\frac{dp}{dy}+1=p^2.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{p\,dp}{p^2-1}=\frac{dy}{2y},$$

$$\ln(p^2-1)=\ln y+\widetilde{C},$$

$$p^2=Cy+1.$$

Найдем константу C из начальных условий ($4-1=1\cdot C,\Rightarrow\ C=3$). Тогда $p=\sqrt{3y+1}$. Вернемся к исходным переменным ($p=y'$).

$$\int\frac{dy}{\sqrt{3y+1}}=\int dx,$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{3y+1}=x+C,$$

$$y=\frac{3}{4}(x+C)^2-\frac{1}{3}.$$

Найдем константу из начального условия ($3/4(1/3+C)^2-1/3=1,\Rightarrow\ C=1$). Решение задачи Коши $y(x)=3/4(x+1)^2-1/3$.