Тема: Дифференциальные уравнения

Задание. *Решить уравнение* $y' = -y/x$ $(x \neq 0)$.

Решение. Уравнение разрешено относительно производной. Заменяем y' на dy/dx, умножаем обе части уравнения на dx и делим на y. Получаем

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируем полученное уравнение:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + C, \quad \ln|y| + \ln|x| = C. \tag{1}$$

Постоянную C можно записать в виде $C = \ln|\widetilde{C}|$ $(\widetilde{C} \neq 0)$ (так как любое положительное или отрицательное число C может быть представлено как натуральный логарифм другого, положительного числа $|\widetilde{C}|$). Подставляя это выражение в (1), получим

$$\ln|xy| = \ln|\widetilde{C}|, \ (\widetilde{C} \neq 0).$$

Потенцируя последнее равенство, находим общий интеграл $xy = \widetilde{C}$ (семейство гипербол). При делении на y мы могли потерять решение $y = 0$. Подставляя $y = 0$ в исходное уравнение, видим, что это решение и оно может быть получено из общего интеграла при $\widetilde{C} = 0$. Таким образом, общий интеграл дается формулой

$$xy = \widetilde{C},$$

где $\widetilde{C}$ может принимать любые значения (в том числе $\widetilde{C} = 0$).