Тема: Дифференциальные уравнения

Задание. *Решить уравнение* $(1+x^2)\,dy - 2xy\,dx = 0$. *Найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию* $y(0)=1$.

Решение. Разделим переменные в уравнении.

$$(1+x^2)\,dy = 2xy\,dx,$$

разделим на $y(1+x^2)$, получим

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x\,dx}{1+x^2},$$

проинтегрируем уравнение

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x\,dx}{1+x^2} + C,$$

$$\ln|y| = \ln|1+x^2| + \ln|\widetilde{C}|,$$

откуда получаем общее решение

$$y = \widetilde{C}(1+x^2).$$

Чтобы найти частное решение, определим значение $\widetilde{C}$ по начальным условиям

$$1 = \widetilde{C}(1+0), \quad \widetilde{C} = 1.$$

Следовательно, частное решение имеет вид $y(x) = 1 + x^2$.

Замечание. При делении на y мы могли потерять решение $y=0$. Подставляя $y=0$ в исходное уравнение, видим, что это решение и оно может быть получено из общего при $\widetilde{C}=0$.