Теория поля
Решение типовых задач

Задание.

Дано скалярное поле $u(x,y,z)$ *и векторное поле* $\bar{a}(x,y,z)$.

Найти $grad\ u, div\ \bar{a}, rot\ \bar{a}$ *в точке* $M(1;5;-2)$.

$$u=\frac{\sqrt{x}}{y}-\frac{yz}{x+\sqrt{y}}$$

$$\bar{a}=yz\bar{\imath}+xz\bar{\jmath}+xy\bar{k}$$

Решение.

Найдем градиент скалярного поля:

$$grad\ u=\left\{\frac{\partial u}{\partial x};\frac{\partial u}{\partial y};\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\cdot\sqrt{x}-yz\cdot\left(x+\sqrt{y}\right)^{-1}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}y}-yz(-1)\left(x+\sqrt{y}\right)^{-2}$$

$$=\frac{1}{2y\sqrt{x}}+\frac{yz}{\left(x+\sqrt{y}\right)^{2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M)=\frac{1}{2\cdot 5\sqrt{1}}+\frac{5(-2)}{\left(1+\sqrt{5}\right)^{2}}=\frac{1}{10}-\frac{10}{6+2\sqrt{5}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}-\frac{yz}{x+\sqrt{y}}\right)=-\frac{\sqrt{x}}{y^2}-\frac{z\left(x+\sqrt{y}\right)-yz\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}}{\left(x+\sqrt{y}\right)^{2}}$$

$$=-\frac{\sqrt{x}}{y^2}-\frac{zx+\frac{1}{2}z\sqrt{y}}{\left(x+\sqrt{y}\right)^{2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(M) = -\frac{\sqrt{1}}{5^2} - \frac{-2\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot(-2)\cdot\sqrt{5}}{\left(1+\sqrt{5}\right)^2} = -\frac{1}{25} + \frac{2+\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{yz}{x+\sqrt{y}}\right) = 0 - \frac{y}{x+\sqrt{y}} = -\frac{y}{x+\sqrt{y}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(M) = -\frac{5}{1+\sqrt{5}}$$

$$grad\, u\ \ (M) = \left\{\frac{1}{10} - \frac{10}{6+2\sqrt{5}};\quad -\frac{1}{25} + \frac{2+\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}};\quad -\frac{5}{1+\sqrt{5}}\right\}$$

Найдем дивергенцию векторного поля:

$$div\, \bar{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$P = yz;\ \frac{\partial P}{\partial x} = 0;\ \ Q = xz;\ \frac{\partial Q}{\partial y} = 0;\ \ R = xy;\ \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

$$div\, \bar{a} = 0$$

Дивергенция заданного векторного поля равна нулю в любой точке (такое поле называется соленоидальным).

Найдем ротор заданного векторного поля

$$rot\, \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \bar{\imath}\cdot\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & xy \end{vmatrix} - \bar{\jmath}\cdot\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz & xy \end{vmatrix} + \bar{k}\cdot\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ yz & xz \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{\imath}(x-x) - \bar{\jmath}(y-y) + \bar{k}(z-z) = 0$$

Ротор заданного векторного поля равен нулю в любой точке (такое поле называется потенциальным).

Ответ. $div\, \bar{a} = 0$; $rot\, \bar{a} = 0$ в любой точке (поле соленоидальное, потенциальное).

$$grad\, u\ \ (M) = \left\{\frac{1}{10} - \frac{10}{6+2\sqrt{5}};\quad -\frac{1}{25} + \frac{2+\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}};\quad -\frac{5}{1+\sqrt{5}}\right\}$$