

## Теория поля Решение типовых задач

ЗАДАНИЕ.

Дано скалярное поле  $u(x, y, z)$  и векторное поле  $\bar{a}(x, y, z)$ .

Найти  $\text{grad } u$ ,  $\text{div } \bar{a}$ ,  $\text{rot } \bar{a}$  в точке  $M(1; 5; -2)$ .

$$u = \frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{yz}{x + \sqrt{y}}$$

$$\bar{a} = yz\bar{i} + xz\bar{j} + xy\bar{k}$$

РЕШЕНИЕ.

Найдем градиент скалярного поля:

$$\text{grad } u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{y} \cdot \sqrt{x} - yz \cdot (x + \sqrt{y})^{-1} \right) = \frac{1}{2\sqrt{xy}} - yz(-1)(x + \sqrt{y})^{-2}$$

$$= \frac{1}{2y\sqrt{x}} + \frac{yz}{(x + \sqrt{y})^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M) = \frac{1}{2 \cdot 5\sqrt{1}} + \frac{5(-2)}{(1 + \sqrt{5})^2} = \frac{1}{10} - \frac{10}{6 + 2\sqrt{5}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{yz}{x + \sqrt{y}} \right) = -\frac{\sqrt{x}}{y^2} - \frac{z(x + \sqrt{y}) - yz \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}}{(x + \sqrt{y})^2}$$

$$= -\frac{\sqrt{x}}{y^2} - \frac{zx + \frac{1}{2}z\sqrt{y}}{(x + \sqrt{y})^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(M) = -\frac{\sqrt{1}}{5^2} - \frac{-2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot \sqrt{5}}{(1 + \sqrt{5})^2} = -\frac{1}{25} + \frac{2 + \sqrt{5}}{6 + 2\sqrt{5}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{yz}{x + \sqrt{y}} \right) = 0 - \frac{y}{x + \sqrt{y}} = -\frac{y}{x + \sqrt{y}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(M) = -\frac{5}{1 + \sqrt{5}}$$

$$\text{grad } u(M) = \left\{ \frac{1}{10} - \frac{10}{6 + 2\sqrt{5}}; -\frac{1}{25} + \frac{2 + \sqrt{5}}{6 + 2\sqrt{5}}; -\frac{5}{1 + \sqrt{5}} \right\}$$

Найдем дивергенцию векторного поля:

$$\text{div } \bar{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$P = yz; \frac{\partial P}{\partial x} = 0; Q = xz; \frac{\partial Q}{\partial y} = 0; R = xy; \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

$$\text{div } \bar{a} = 0$$

Дивергенция заданного векторного поля равна нулю в любой точке (такое поле называется соленоидальным).

Найдем ротор заданного векторного поля

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{a} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xy \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xy \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ yz & xz \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i}(x - x) - \bar{j}(y - y) + \bar{k}(z - z) = 0 \end{aligned}$$

Ротор заданного векторного поля равен нулю в любой точке (такое поле называется потенциальным).

Ответ.  $\text{div } \bar{a} = 0$ ;  $\text{rot } \bar{a} = 0$  в любой точке (поле соленоидальное, потенциальное).

$$\text{grad } u(M) = \left\{ \frac{1}{10} - \frac{10}{6 + 2\sqrt{5}}; -\frac{1}{25} + \frac{2 + \sqrt{5}}{6 + 2\sqrt{5}}; -\frac{5}{1 + \sqrt{5}} \right\}$$

Решение задачи по теории поля скачано с  
[https://www.matburo.ru/ex\\_ma.php?p1=mafield](https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=mafield)

(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию