Теория поля
Потенциальность векторного поля

Задание.

Вычислить потенциальную функцию векторного поля

$$\bar{a}(M)=\left(\frac{x}{y}+y\cos x\right)\bar{i}+\left(-\frac{x^2}{2y^2}+\sin x\right)\bar{j}$$

Решение.

Покажем, что данное поле является потенциальным. Обозначим

$P(x,y)=\frac{x}{y}+y\cos x, Q(x,y)=-\frac{x^2}{2y^2}+\sin x$, тогда получаем

$$\left|\begin{array}{l}\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}+y\cos x\right)=-\frac{x}{y^2}+\cos x\\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x^2}{2y^2}+\sin x\right)=-\frac{2x}{2y^2}+\cos x=-\frac{x}{y^2}+\cos x\end{array}\right. \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Значит, существует такая функция $U(x,y)$, что $dU=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

$$\begin{cases}\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{x}{y}+y\cos x\\ \frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{x^2}{2y^2}+\sin x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}U=\int\left(\frac{x}{y}+y\cos x\right)dx\\ \frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{x^2}{2y^2}+\sin x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}U=\frac{x^2}{2y}+y\sin x+\varphi(y)\\ \frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{x^2}{2y^2}+\sin x\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}U=\frac{x^2}{2y}+y\sin x+\varphi(y)\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2y}+y\sin x+\varphi(y)\right)=-\frac{x^2}{2y^2}+\sin x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}U=\frac{x^2}{2y}+y\sin x+\varphi(y)\\ -\frac{x^2}{2y^2}+\sin x+\varphi'(y)=-\frac{x^2}{2y^2}+\sin x\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}U=\frac{x^2}{2y}+y\sin x+\varphi(y)\\ \varphi'(y)=0\end{cases}$$

Так как потенциальная функция определяется с точностью до константы, поэтому $U(x,y)=\dfrac{x^2}{2y}+y\sin x+C$