

## Теория поля Потенциальность векторного поля

ЗАДАНИЕ.

Вычислить потенциальную функцию векторного поля

$$\vec{a}(M) = \left( \frac{x}{y} + y \cos x \right) \vec{i} + \left( -\frac{x^2}{2y^2} + \sin x \right) \vec{j}$$

РЕШЕНИЕ.

Покажем, что данное поле является потенциальным. Обозначим

$$P(x, y) = \frac{x}{y} + y \cos x, Q(x, y) = -\frac{x^2}{2y^2} + \sin x, \text{ тогда получаем}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{y} + y \cos x \right) = -\frac{x}{y^2} + \cos x \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{x^2}{2y^2} + \sin x \right) = -\frac{2x}{2y^2} + \cos x = -\frac{x}{y^2} + \cos x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Значит, существует такая функция  $U(x, y)$ , что  $dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{y} + y \cos x \\ \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{x^2}{2y^2} + \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U = \int \left( \frac{x}{y} + y \cos x \right) dx \\ \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{x^2}{2y^2} + \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U = \frac{x^2}{2y} + y \sin x + \varphi(y) \\ \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{x^2}{2y^2} + \sin x \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} U = \frac{x^2}{2y} + y \sin x + \varphi(y) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x^2}{2y} + y \sin x + \varphi(y) \right) = -\frac{x^2}{2y^2} + \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U = \frac{x^2}{2y} + y \sin x + \varphi(y) \\ -\frac{x^2}{2y^2} + \sin x + \varphi'(y) = -\frac{x^2}{2y^2} + \sin x \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} U = \frac{x^2}{2y} + y \sin x + \varphi(y) \\ \varphi'(y) = 0 \end{cases}$$

Решение задачи по теории поля скачано с  
[https://www.matburo.ru/ex\\_ma.php?p1=mafield](https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=mafield)

(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

Так как потенциальная функция определяется с точностью до константы,

поэтому  $U(x, y) = \frac{x^2}{2y} + y \sin x + C$