Теория поля
Работа векторного поля

Задание.

Вычислить работу векторного поля силы $F(M)=xz\overline{i}-\overline{j}+y\overline{k}$ *при движении материальной точки по пути* $L: x^2+y^2+z^2=4; z=1(y\ge 0)$ *от точки* $M\left(\sqrt{3};0;1\right)$ *до точки* $N\left(-\sqrt{3};0;1\right)$

Решение.

Параметризуем кривую L:

$$L: x^2+y^2+z^2=4; z=1 \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=3 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3}\cos t \\ y=\sqrt{3}\sin t \\ z=1 \\ t\in[0;2\pi] \end{cases}$$

Тогда получаем

$$M\left(\sqrt{3};0;1\right) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}=\sqrt{3}\cos t \\ 0=\sqrt{3}\sin t \quad \Rightarrow t=0 \\ z=1 \end{cases}$$

$$N\left(-\sqrt{3};0;1\right) \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}=\sqrt{3}\cos t \\ 0=\sqrt{3}\sin t \quad \Rightarrow t=\pi \\ z=1 \end{cases}$$

Отметим, что при $t\in[0;\pi]$ выполняется $y\ge 0$

Тогда работа поля будет равна :

$$A=\int_{MN} xzdx-dy+ydz=\int_0^{\pi}\sqrt{3}\cos t\cdot 1d\left(\sqrt{3}\cos t\right)-d\left(\sqrt{3}\sin t\right)+\sqrt{3}\sin t d1=$$

$$=\int_0^{\pi}\left(-3\cos t\sin t-\sqrt{3}\cos t\right)dt=-\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}\sin 2t+\sqrt{3}\cos t\right)dt=-\left[-\frac{3}{4}\cos 2t+\sqrt{3}\sin t\right]_0^{\pi}=$$

$$=-\left[-\frac{3}{4}\cos 2\pi+\sqrt{3}\sin\pi\right]+\left[-\frac{3}{4}\cos 0+\sqrt{3}\sin 0\right]=0$$