Теория поля
Поток векторного поля

ЗАДАНИЕ.

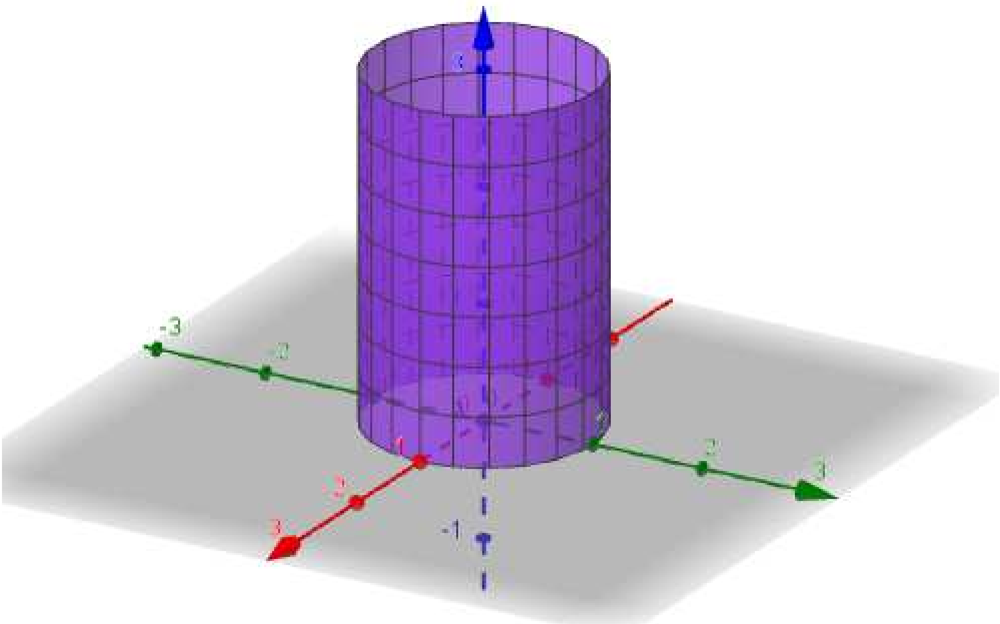
Найти поток векторного поля $\bar{a}$ *через часть поверхности* S *, вырезаемую плоскостями* P_1, P_2 *(нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).*

$\bar{a} = (x^3 + xy^2)\bar{\imath} + (y^3 + x^2y)\bar{\jmath} + z^2\bar{k}$

S: $x^2 + y^2 = 1,\qquad P_1: z = 0,\qquad P_2:\ z = 3$

РЕШЕНИЕ.

Поверхность S , вырезаемая плоскостями P_1, P_2 , есть часть цилиндра:



Поле единичных нормалей к заданной поверхности:

$$\bar{n} = \pm\frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|},\qquad \boldsymbol{F} = x^2 + y^2 - \mathbf{1}$$

$$\operatorname{grad} \boldsymbol{F} = (2\boldsymbol{x}; 2\boldsymbol{y}; 0);\ \ |\operatorname{grad} F| = \sqrt{4x^2 + 4y^2} = \mathbf{2}\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\bar{n} = \pm\frac{(2x; 2y; 0)}{\mathbf{2}\sqrt{x^2 + y^2}} = \pm\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \mathbf{0}\right)$$

Учитывал, что нормали должны образовывать острый угол с осью Ox при $x > 0$, и тупой угол с осью Ox при $x < 0$, выбираем в этой формуле знак плюс.

Скалярное произведение

$$\bar{a} \cdot \bar{n} = (x^3 + xy^2) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + (y^3 + x^2 y) \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z^2 \cdot \mathbf{0} = \frac{x^2(x^2 + y^2) + y^2(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$$

По определению, искомый поток равен

$$\Pi = \iint_S \bar{a} \cdot \bar{n} ds = \iint_S (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} ds$$

Введем на заданной поверхности цилиндрические координаты:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

В этих координатах поверхность S задается условиями

$$\begin{cases} r = 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le z \le 3 \end{cases}$$

Так как $ds = r d\varphi dz = 1 d\varphi dz$, получим:

$$\Pi = \iint_S (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} ds = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (r^2)^{\frac{3}{2}} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 r^3 dz = 1^3 \int_0^{2\pi} 3 d\varphi = 6\pi$$

Ответ. 6π