# Теория поля
# Поток векторного поля

Задание.

Найти поток векторного поля $\bar{a}$ через замкнутую поверхность $S$ (нормаль внешняя).

$\bar{a} = x\bar{i} + z\bar{j} - y\bar{k}$

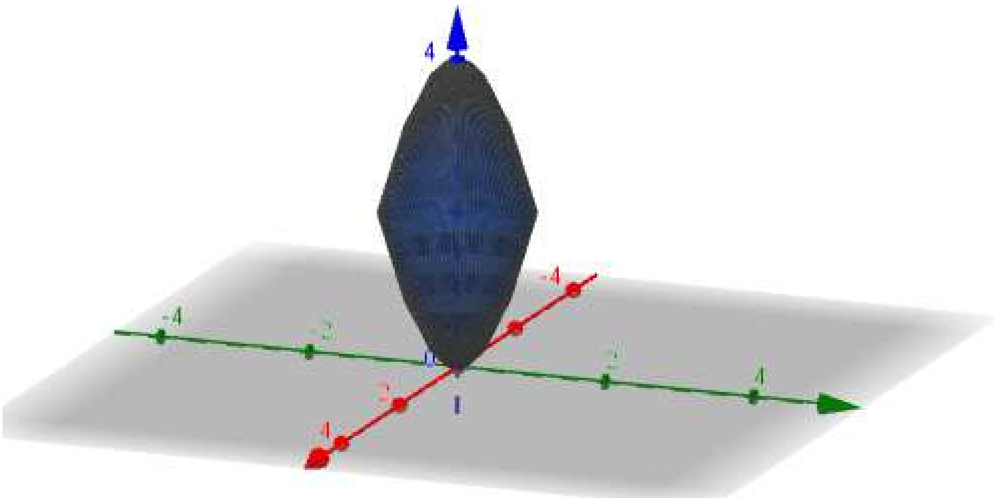
$S: \begin{cases} z = 4 - 2(x^2 + y^2) \\ z = 2(x^2 + y^2) \end{cases}$

Решение.

Обе поверхности - параболоиды. Их пересечение

$4 - 2(x^2 + y^2) = 2(x^2 + y^2);\ x^2 + y^2 = 1;\ z = 2(x^2 + y^2) = 2$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 2 \end{cases}$



Согласно формуле Остроградского-Гаусса поток поля вектора $\bar{F}$ через замкнутую поверхность в направлении внешней нормали равен тройному интегралу от дивергенции этого поля по объему $V$, ограниченному этой поверхностью.

Найдем дивергенцию:

$$\operatorname{div}\bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(z) + \frac{\partial}{\partial z}(-y) = 1$$

Итак, согласно формуле Остроградского-Гаусса искомый поток равен:

$$\Pi = \iiint_V 1 dxdydz$$

Для вычисления тройного интеграла перейдем к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi\,; \quad dxdydz = rdrd\varphi dz \\ z = z \end{cases}$$

Ограничения, задающие тело, примут вид

$$\begin{cases} 2r^2 \le z \le 4 - 2r^2 \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

Получим:

$$\Pi = \iiint_V 1 dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{2r^2}^{4-2r^2} r dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r(4 - 2r^2 - 2r^2) dr = 4\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r - r^3) dr =$$

$$= 4\int_0^{2\pi} \left( \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 \right) d\varphi = 4\int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

**Ответ.** $2\pi$