Решение задачи по теории поля скачано с
https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=mafield
(больше примеров по ссылке)
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

# Теория поля
# Поток векторного поля

ЗАДАНИЕ.

*Найти поток векторного поля* $\bar{a} = x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k}$ *через замкнутую поверхность* $S$ *(нормаль внешняя).*

$S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$

РЕШЕНИЕ.

Найдем дивергенцию:

$$\operatorname{div}\bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$$

Итак, согласно формуле Остроградского-Гаусса искомый поток равен:

$$\Pi = \iiint_V 3(x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$$

Для вычисления тройного интеграла перейдем к сферическим координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta;\quad dxdydz = r^2\sin\theta\, dr d\varphi d\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Ограничения, задающие тело, примут вид

$$\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$$

Получим:

$$\Pi = \iiint_V 3(x^2 + y^2 + z^2)dxdydz = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 3r^2 \cdot r^2 \sin\theta\, dz =$$

$$\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{5}r^2\Big|_0^1\right) d\varphi = \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} \frac{3}{5} d\varphi = \frac{3}{5}\cdot 2\pi \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta = \frac{6\pi}{5}(-\cos\theta)\Big|_0^\pi =$$

$$= \frac{6\pi}{5}(-\cos\pi - \cos 0) = \frac{12\pi}{5}$$

**Ответ.** $\frac{12\pi}{5}$.