Теория поля
Циркуляция векторного поля

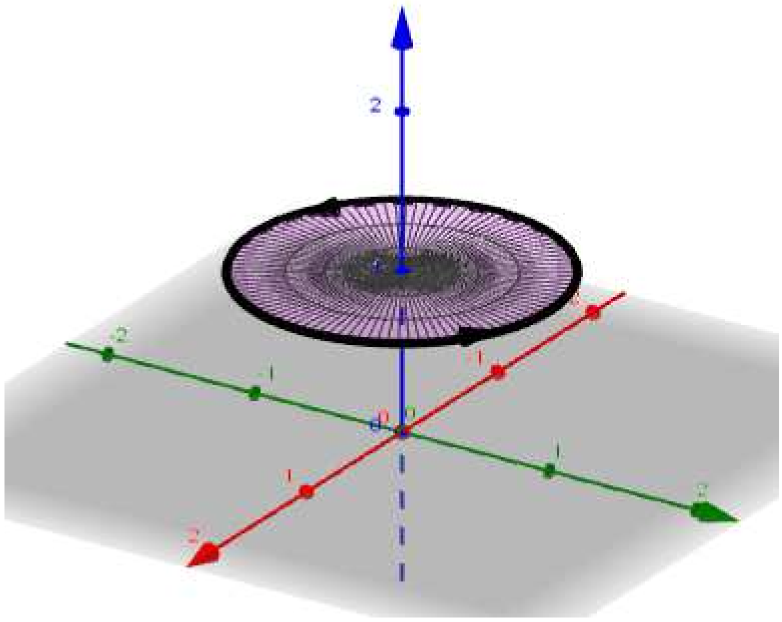
Задание.

Найти циркуляцию вектора $\bar{a} = (x^2 - y)\bar{\imath} + x\bar{\jmath} + \bar{k}$ *по контуру*

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

с помощью формулы Стокса и непосредственно (положительным направлением обхода контура считать то, при котором точка перемещается по часовой стрелке, если смотреть из начала координат).

Решение.



1) Формула Стокса.

Найдем ротор поля $\bar{a} = (x^2 - y)\bar{\imath} + x\bar{\jmath} + \bar{k}$:

$$rot\,\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - y & x & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}1 - \frac{\partial}{\partial z}x\right)\bar{\imath} - \left(\frac{\partial}{\partial x}1 - \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - y)\right)\bar{\jmath}$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}x - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y)\right)\bar{k} =$$

$$= 0\bar{\imath} - 0\bar{\jmath} + 2\bar{k}$$

В качестве поверхности S, натянутой на контур Г , выберем часть плоскости $z = 1$, ограниченную контуром Г.

Единичный вектор внешней нормали к поверхности $S: z = 1$, соответствующий положительному направлению обхода:

$$\bar{n}_0 = (0; 0; 1)$$

$$rot\,a \cdot \bar{n}_0 = 2 \cdot 1 = 2$$

По формуле Стокса получим

$$C = \iint\limits_S rot\,a \cdot \bar{n}_0 ds = 2\iint\limits_S ds = 2S_{\text{кр}} = 2 \cdot \pi \cdot 1^2 = 2\pi$$

2) Непосредственное вычисление.

$$C = \int\limits_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_\Gamma (x^2 - y)dx + xdy + dz$$

Имеем

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t\,; \quad 0 \le t \le 2\pi \\ z = 1 \end{cases}$$

$$dx = -\sin t\,; dy = \cos t\,; dz = 0$$

Получим

$$C = \int_{\Gamma} (x^2 - y)dx + xdy + dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \big((\cos^2 t - \sin t)(-\sin t) + \cos t \cos t + 0\big)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t\,(-\sin t) + \sin^2 t + \cos^2 t)dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, d(\cos t) + \int_0^{2\pi} 1dt =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\cos^3 t + t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{3}\cos^3 2\pi - \frac{1}{3}\cos^3 0 + 2\pi - 0 = 2\pi$$

ОТВЕТ. $C = 2\pi$.