# Функции нескольких переменных
# Экстремумы

ЗАДАНИЕ.

*Определите, при каких значениях параметра* $a$ *функция*

$z(x,y)=x^3+y^3+4xy-7x-7y+a(x-1)^2+a(y-1)^2$ *в точке* $(1;1)$*:*

*А) имеет максимум,*

*Б) имеет минимум,*

*В) не имеет экстремума.*

РЕШЕНИЕ.

Проверим, что $(1;1)$ является критической точкой. Вычислим частные производные и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} z'_x=\left(x^3+y^3+4xy-7x-7y+a(x-1)^2+a(y-1)^2\right)'_x=3x^2+4y-7+2a(x-1)=0, \\ z'_y=\left(x^3+y^3+4xy-7x-7y+a(x-1)^2+a(y-1)^2\right)'_y=3y^2+4x-7+2a(y-1)=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2+4y-7+2a(x-1)=0, \\ 3y^2+4x-7+2a(y-1)=0, \end{cases}$$

Подставим $x=1, y=1$:

$$\begin{cases} 3+4-7+0=0, \\ 3+4-7+0=0. \end{cases}$$

Верно. Значит, $x=1, y=1$ - критическая точка.

Вычисляем вторые производные.

$$z''_{xx}=\left(3x^2+4y-7+2a(x-1)\right)'_x=6x+2a.$$

$$z''_{yy}=\left(3y^2+4x-7+2a(y-1)\right)'_y=6y+2a$$

$$z'_{xy}=\left(3x^2+4y-7+2a(x-1)\right)'_y=4$$

Подставляем в определитель вторых производных при $x=1, y=1$:

$$\Delta(1;1)=\begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix}(1;1)=\begin{vmatrix} 6+2a & 4 \\ 4 & 6+2a \end{vmatrix}=(6+2a)^2-16=$$
$$=(6+2a-4)(6+2a+4)=(2+2a)(10+2a)=4(1+a)(5+a).$$

Исследуем знак определителя $\Delta=4(1+a)(5+a)$. Так как это квадратный трехчлен относительно $a$, то

1. при $a\in(-5;-1)$ определитель $\Delta=4(1+a)(5+a)<0$, экстремума нет.
2. при $a\in(-\infty;-5)\cup(-1;+\infty)$, определитель $\Delta=4(1+a)(5+a)>0$, экстремум есть. Рассмотрим знак $z''_{xx}=6+2a=2(3+a)$. При $a<-3$ это выражение отрицательно, в точке максимум, при $a>-3$ положительно, в точке минимум. Таким образом, при $a\in(-\infty;-5)$ достигается максимум, при $a\in(-1;+\infty)$ достигается минимум.

**Ответ:**

А) $a\in(-\infty;-5)$

Б) $a\in(-1;+\infty)$

В) $a\in(-5;-1)$