Функции нескольких переменных
Ряд Тэйлора

ЗАДАНИЕ.

Разложите функцию $f(x,y)=x^2\ln y+y^2$ *по формуле Тейлора (с остаточным членом в форме Пеано) в окрестности точки* $M(2;1)$ *до членов второго порядка включительно. Выпишите первый и второй дифференциалы заданной функции.*

РЕШЕНИЕ. Формула Тэйлора имеет вид:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+o\left(r^2\right),\ \text{где}\ r=\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}.$$

Вычисляем все необходимые величины.

$$f(x_0,y_0)=f(2;1)=4\ln 1+1^2=1.$$

$$df(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Первые производные:

$$f'_x=\left(x^2\ln y+y^2\right)'_x=2x\ln y,\quad f'_y=\left(x^2\ln y+y^2\right)'_y=\frac{x^2}{y}+2y.$$

$$f'_x(x_0,y_0)=f'_x(2,1)=4\ln 1=0,\quad f'_y(x_0,y_0)=f'_y(2,1)=\frac{2^2}{1}+2=6.$$

$$d^2f(x_0,y_0)=f''_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2f''_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+f''_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2$$

Вторые производные:

$$f''_{xx}=(2x\ln y)'_x=2\ln y,\quad f'_{xy}=(2x\ln y)'_y=\frac{2x}{y},\quad f''_{yy}=\left(\frac{x^2}{y}+2y\right)'_y=-\frac{x^2}{y^2}+2.$$

$$f''_{xx}(x_0,y_0)=f''_{xx}(2,1)=2\ln 1=0,\quad f'_{xy}(x_0,y_0)=f''_{xy}(2,1)=\frac{4}{1}=4,$$

$$f''_{yy}(x_0,y_0)=f''_{yy}(2,1)=-\frac{4}{1}+2=-2.$$

Подставляем все в формулу Тэйлора:

$$f(x,y)=1+6(y-1)+\frac{1}{2!}\left[8(x-2)(y-1)-2(y-1)^2\right]+o\left(r^2\right)=$$

$$=1+6(y-1)+4(x-2)(y-1)-(y-1)^2+o\left(r^2\right).$$

Выпишем первый и второй дифференциалы заданной функции.

$$df = f_x^{'}dx+f_y^{'}dy=2x\ln y dx+\left(\frac{x^2}{y}+2y\right)dy\,.$$

$$d^2f = f_{xx}^{"}(dx)^2+2f_{xy}^{"}dxdy+f_{yy}^{"}(dy)^2=2\ln y(dx)^2+\frac{4x}{y}dxdy+\left(-\frac{x^2}{y^2}+2\right)(dy)^2\,.$$