Решение игры с платежной матрицей 4×4 с предварительным упрощением (доминированием)

ЗАДАНИЕ.

Выполните доминирование и найдите оптимальное решение и цену игры, заданной матрицей.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ.

Найдем наилучшую стратегию первого игрока: минимальное число в каждой строке обозначим α_i. Получаем: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 1$. Выберем максимальное из этих значений $\alpha = 2$ - нижняя цена игры, стратегия A3.
Аналогично для второго игрока. Найдем максимальные значения выигрыша по столбцам:
$\beta_1 = 4$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 3$, $\beta_4 = 4$ и минимальное из этих чисел $\beta = 3$ - верхняя цена игры, стратегия B2 и B3.

Так как верхняя и нижняя цены игры различны, игра не имеет решения в чистых стратегиях, цена игры находится в промежутке от 2 до 3 (между нижней и верхней ценой игры).

Игра имеет большую размерность, попробуем ее уменьшить, выделив невыгодные стратегии и вычеркнув их из матрицы (выполняем доминирование):

1. Все элементы столбца B4 больше или равны элементам столбца B3, поэтому вычеркиваем столбец B4.
2. Все элементы столбца B1 больше или равны элементам столбца B3, поэтому вычеркиваем столбец B1.
3. Так как все элементы строки A1 меньше или равны элементам строки A3, вычеркиваем строку A1.
4. Так как все элементы строки A2 меньше или равны элементам строки A3, вычеркиваем строку A2.

$$\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & 3 & 2 & \\ & 1 & 3 & \end{pmatrix}.$$

Получили матрицу (A3, A4, B2, B3): $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Решим данную игру аналитическим методом.

Средний выигрыш первого игрока, если он использует оптимальную смешанную стратегию $x^* = \left(x_1^*, x_2^*\right)$, а второй игрок – чистую стратегию, соответствующую первому столбцу платежной матрицы, равен цене игры v:

$3x_1^* + x_2^* = v$.

Тот же средний выигрыш получает первый игрок, если второй игрок применяет стратегию, соответствующую второму столбцу платежной матрицы, то есть

$2x_1^* + 3x_2^* = v$.

Учитывая, что $x_1^* + x_2^* = 1$, получаем систему уравнений для определения оптимальной стратегии первого игрока и цены игры:

$$\begin{cases} 3x_1^* + x_2^* = v, \\ 2x_1^* + 3x_2^* = v, \\ x_1^* + x_2^* = 1. \end{cases}$$

Решаем эту систему и находим:

$$\begin{cases} x_1^* = 2/3, \\ x_2^* = 1/3, \\ v = 7/3. \end{cases}$$

Применяя теорему об активных стратегиях при отыскании смешанной стратегии второго игрока, получаем, что при любой чистой стратегии первого игрока средний проигрыш второго игрока равен цене игры, то есть:

$$\begin{cases} 3y_1^* + 2y_2^* = 7/3, \\ y_1^* + 3y_2^* = 7/3, \\ y_1^* + y_2^* = 1. \end{cases}$$

Отсюда находим $y_1{*} = 1/3$, $y_2{*} = 2/3$.

Игра решена. Оптимальные смешанные стратегии $X^* = \left(2/3;1/3\right)$, $Y^* = \left(1/3;2/3\right)$, цена игры $v = 7/3$.