Тема: аналитическая геометрия в пространстве

ЗАДАНИЕ. *Для пирамиды с вершинами в точках* A_1, A_2, A_3, A_4 *найти:*

А) длину ребра A_1A_2;

Б) угол между ребрами A_1A_2 *и* A_1A_4;

В) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$:

Г) площадь грани $A_1A_2A_3$;

Д) угол между ребрами A_1A_4 *и плоскостью* $A_1A_2A_3$;

Е) уравнение высоты, опущенной из точки A_4 *на грань* $A_1A_2A_3$;

Ж) объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$.

A_1 (2, 3, 1), A_2 (4, 1, -2), A_3 (6, 3, 7), A_4 (-5, -4, 8)

РЕШЕНИЕ. Везде далее при решении считаем, что точка A_i имеет координаты (x_i, y_i, z_i).

А) Найдем длину ребра A_1A_2 по формуле

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} =$$
$$=\sqrt{(4-2)^2+(1-3)^2+(-2-1)^2} = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17}$$

Б) Угол α между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 равен углу между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_4}$. Найдем координаты этих векторов:

$\overline{A_1A_2} = \{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\} = \{4-2, 1-3, -2-1\} = \{2,-2,-3\}$.

$\overline{A_1A_4} = \{x_4-x_1, y_4-y_1, z_4-z_1\} = \{-5-2, -4-3, 8-1\} = \{-7,-7,7\}$.

Тогда угол α определим из соотношения

$$\cos\alpha = \frac{\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_4}}{|\overline{A_1A_2}|\cdot|\overline{A_1A_4}|} = \frac{2*(-7)-2*(-7)-3*7}{\sqrt{4+4+9}\sqrt{49+49+49}} = \frac{-21}{7\sqrt{51}} = -\frac{3}{\sqrt{51}}$$

Тогда $\alpha = \arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{51}}\right) = 2$ рад. $\approx 115^\circ$

В) Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ найдем из соотношения:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Получаем:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 4-2 & 1-3 & -2-1 \\ 6-2 & 3-3 & 7-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$+(z-1)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12(x-2)-24(y-3)+8(z-1) = -12x-24y+8z+88=0$$

Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ $-3x-6y+2z+22=0$, нормаль к плоскости $\overline{n} = \{-3,-6,2\}$.

Г) Найдем векторное произведение $\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}$.

Вектор $\overline{A_1A_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\} = \{4,0,6\}$.

$$\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12\bar{i} - 24\bar{j} + 8\bar{k} = \{-12,-24,8\}$$

Тогда площадь грани $A_1A_2A_3$ равна

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = 14.$$

Д) Угол β между ребром A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$ найдем из формулы:

$$\sin\beta = \frac{\overline{A_1A_4} \cdot \bar{n}}{\left|\overline{A_1A_4}\right| \cdot |\bar{n}|} = \frac{-7*(-3) - 7*(-6) + 7*2}{\sqrt{49+49+49}\sqrt{9+36+4}} = \frac{11}{7\sqrt{3}}$$

откуда $\beta = \arcsin\left(\frac{11}{7\sqrt{3}}\right) = 1{,}14$ рад. $\approx 65^\circ$.

Е) Так как высота A_4H перпендикулярна плоскости $A_1A_2A_3$, в качестве ее направляющего вектора можно выбрать вектор нормали $\bar{n}$. Так как прямая проходит через точку A_4, ее канонические уравнения принимают вид:

$$\frac{x - x_4}{n_1} = \frac{y - y_4}{n_2} = \frac{z - z_4}{n_3} \text{ или } \frac{x+5}{-3} = \frac{y+4}{-6} = \frac{z-8}{2}$$

Ж) Найдем смешанное произведение

$$\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -7 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= 2*42 + 2*70 - 3*(-28) = 308$$

Тогда объем пирамиды

$$V = \frac{1}{6}\left|\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4}\right| = \frac{308}{6} \approx 51{,}33$$