

Тема: Полное исследование функции

ЗАДАНИЕ. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить график.

$$y = -\frac{1}{4}(x^3 - 3x^2 + 4)$$

РЕШЕНИЕ:

1) Область определения функции – вся числовая прямая, то есть $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

Точек разрыва нет, вертикальных асимптот нет.

2) Точки пересечения с осями координат:

$$Ox: y = -\frac{1}{4}(x^3 - 3x^2 + 4) = 0, \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2, \text{ точки } (-1,0), (2,0).$$

$$Oy: x = 0, \Rightarrow y = -\frac{1}{4}(0 - 0 + 4) = -1. \text{ Точка } (0, -1).$$

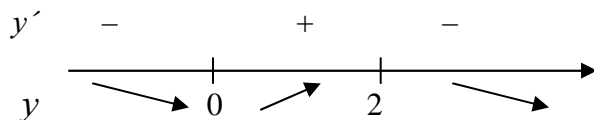
3) Функция общего вида, так как

$$y(-x) = -\frac{1}{4}((-x)^3 - 3(-x)^2 + 4) = -\frac{1}{4}(-x^3 - 3x^2 + 4) \neq \pm y(x)$$

4) Экстремумы и монотонность. Вычисляем первую производную:

$$y'(x) = \left(-\frac{1}{4}(x^3 - 3x^2 + 4)\right)' = -\frac{1}{4}(3x^2 - 6x) = -\frac{3}{4}x(x-2) = 0$$

Находим критические точки: $x_1 = 0, x_2 = 2$. Исследуем знак производной на интервалах, на которые критическая точка делит область определения функции.

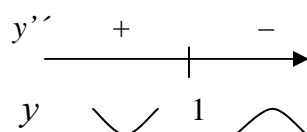


Функция убывает на интервалах $(-\infty; 0), (2; +\infty)$, возрастает на интервале $(0; 2)$. Функция имеет минимум в точке $x = 0, y(0) = -1$, функция имеет максимум в точке $x = 2, y(2) = 0$

5) Выпуклость и точки перегиба. Вычисляем вторую производную.

$$y''(x) = \left(-\frac{1}{4}(3x^2 - 6x)\right)' = -\frac{1}{4}(6x - 6) = -\frac{3}{4}(x-1) = 0.$$

Находим критические точки: $x = 1$. Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят области определения функции.



Функция выпукла вверх на интервале $(1; +\infty)$, выпукла вниз на интервале $(-\infty; 1)$. Точка перегиба: $x = 1, y(1) = -0,5$.

6) Асимптоты.

Так как $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x} \right) = -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 3x + 4/x) = -\infty$, асимптот нет.

7) Строим график функции, отметим ключевые точки (экстремумы и точки выпуклости):

