

Тема: Исследование функции с помощью производных

ЗАДАНИЕ. Проведите исследование функции с построением графика.

$$y = \frac{x^3}{2(x+5)^2}$$

РЕШЕНИЕ:

Пункт 1. Область определения. Функция определена для всех x кроме тех, которые обращают знаменатель в нуль: $x = -5$, то есть $D(y) = (-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$.

Рассмотрим предел:

$$\lim_{x \rightarrow -5 \pm 0} y = \lim_{x \rightarrow -5 \pm 0} \frac{x^3}{2(x+5)^2} = \frac{-125}{2(+0)} = -\infty,$$

то есть $x = -5$ - двусторонняя вертикальная асимптота.

Пункт 2. Точки пересечения с осями координат:

Ось Ox : $y = \frac{x^3}{2(x+5)^2} = 0, \Rightarrow x = 0$, точка $(0,0)$.

Ось Oy , $x = 0 \Rightarrow y = 0$, точка $(0,0)$.

Пункт 3. Функция общего вида, так как

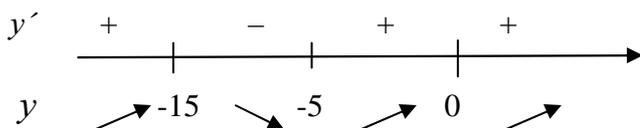
$$y(-x) = \frac{(-x)^3}{2(-x+5)^2} = -\frac{x^3}{2(-x+5)^2} \neq y(x).$$

Пункт 4. Экстремумы и монотонность.

Вычисляем производную функции:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^3}{2(x+5)^2} \right)' = \frac{3x^2(x+5)^2 - 2x^3(x+5)}{2(x+5)^4} = \frac{3x^2(x+5) - 2x^3}{2(x+5)^3} = \frac{3x^3 + 15x^2 - 2x^3}{2(x+5)^3} = \\ &= \frac{x^3 + 15x^2}{2(x+5)^3} = \frac{x^2(x+15)}{2(x+5)^3}. \end{aligned}$$

Критические точки: $x_1 = 0, x_2 = -15, x_3 = -5$.



Функция возрастает на интервалах $(-\infty; -15)$, $(-5; 0)$, $(0; +\infty)$, убывает на интервале

$(-15; -5)$. Функция имеет максимум при $x = -15$, $y(-15) = -\frac{135}{8} = -16,875$.

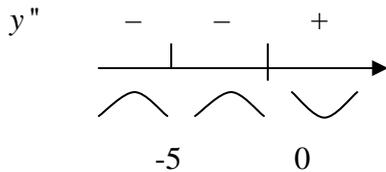
Пункт 5. Выпуклость и точки перегиба.

Вычислим вторую производную:

$$y' = \left(\frac{x^3 + 15x^2}{2(x+5)^3} \right)' = \frac{(3x^2 + 30x)(x+5)^3 - 3(x^3 + 15x^2)(x+5)^2}{2(x+5)^6} = \frac{(3x^2 + 30x)(x+5) - 3(x^3 + 15x^2)}{2(x+5)^4} =$$

$$= \frac{3x^3 + 15x^2 + 30x^2 + 150x - 3x^3 - 45x^2}{2(x+5)^4} = \frac{150x}{(x+5)^4}.$$

Критические точки: $x_1 = 0$, $x_2 = -5$.



Функция выпукла вверх на интервалах $(-\infty; -5)$, $(-5; 0)$, выпукла вниз на интервале $(0; +\infty)$, точка перегиба $(0; 0)$.

Пункт 6. Наклонные асимптоты вида $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2(x+5)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2(1+5/x)^2} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2(x+5)^2} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - x(x+5)^2}{2(x+5)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - x^3 - 10x^2 - 25x}{2(x+5)^2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-10x^2 - 25x}{2(x+5)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-10 - 25/x}{2(1+5/x)^2} \right) = -5.$$

Таким образом, наклонная асимптота $y = \frac{1}{2}x - 5$.

Строим график:

