Пример решения задачи:
Исследование параметрически заданной функции. Построение графика

ЗАДАНИЕ.

Построить график функции $y = y(x)$, *заданной параметрически*: $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{t+1}, \\ y = \dfrac{1}{t} - \dfrac{t^3}{3}. \end{cases}$

РЕШЕНИЕ.

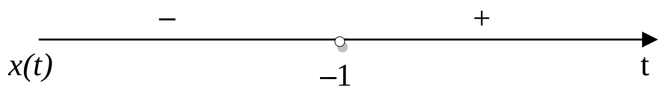
1. Промежутки знакопостоянства.

$x = \dfrac{t^2}{t+1}$

$x(t) > 0 \Leftrightarrow t \in (-1;+\infty)$,

$x(t) < 0 \Leftrightarrow t \in (-\infty;-1)$,

$x(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

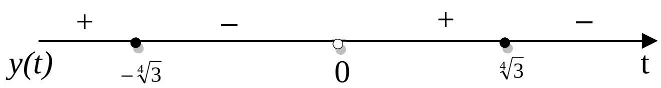


$y = \dfrac{1}{t} - \dfrac{t^3}{3}$

$y(t) > 0 \Leftrightarrow t \in (-\infty;-\sqrt[4]{3}) \cup (0;\sqrt[4]{3})$,

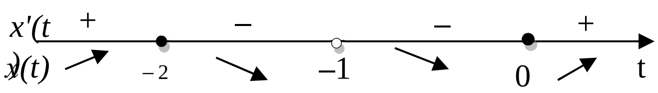
$y(t) < 0 \Leftrightarrow t \in (-\sqrt[4]{3};0) \cup (\sqrt[4]{3};+\infty)$,

$y(t) = 0 \Leftrightarrow t_1 = \pm\sqrt[4]{3}$.



2. Монотонность и локальный экстремум функций x(t), y(t).

$x' = \dfrac{2t(t+1) - t^2}{(t+1)^2} = \dfrac{t^2 + 2t}{(t+1)^2}$



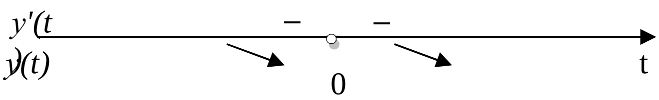
x(t) убывает на интервалах $(-2;-1) \cup (-1;0)$

x(t) возрастает на интервалах $(-\infty;-2) \cup (0;+\infty)$.

$t = -2$ – строгий локальный максимум, $x(-2) = -4$;

$t = 0$ – строгий локальный минимум, $x(0) = 0$.

$y' = -\dfrac{1}{t^2} - t^2$



y(t) убывает на интервалах $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$

3. Асимптоты функций.

$x = \dfrac{t^2}{t+1}$

$\lim\limits_{t\to-1+} x(t) = \lim\limits_{t\to-1+} \frac{t^2}{t+1} = +\infty$;

$\lim\limits_{t\to-1-} x(t) = \lim\limits_{t\to-1-} \frac{t^2}{t+1} = -\infty \Rightarrow t=-1$ – вертикальная асимптота.

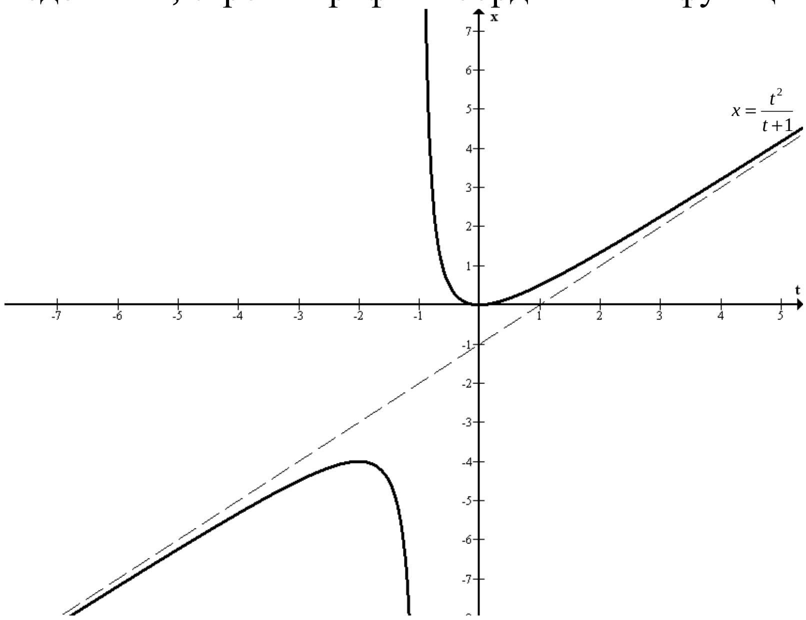
$k = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{x(t)}{t} = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{t^2}{t(t+1)} = 1$, $l = \lim\limits_{t\to\infty} x(t) - kt = \lim\limits_{t\to\infty}(\frac{t^2}{t+1} - t) = -1 \Rightarrow x = t-1$ – наклонная асимптота.

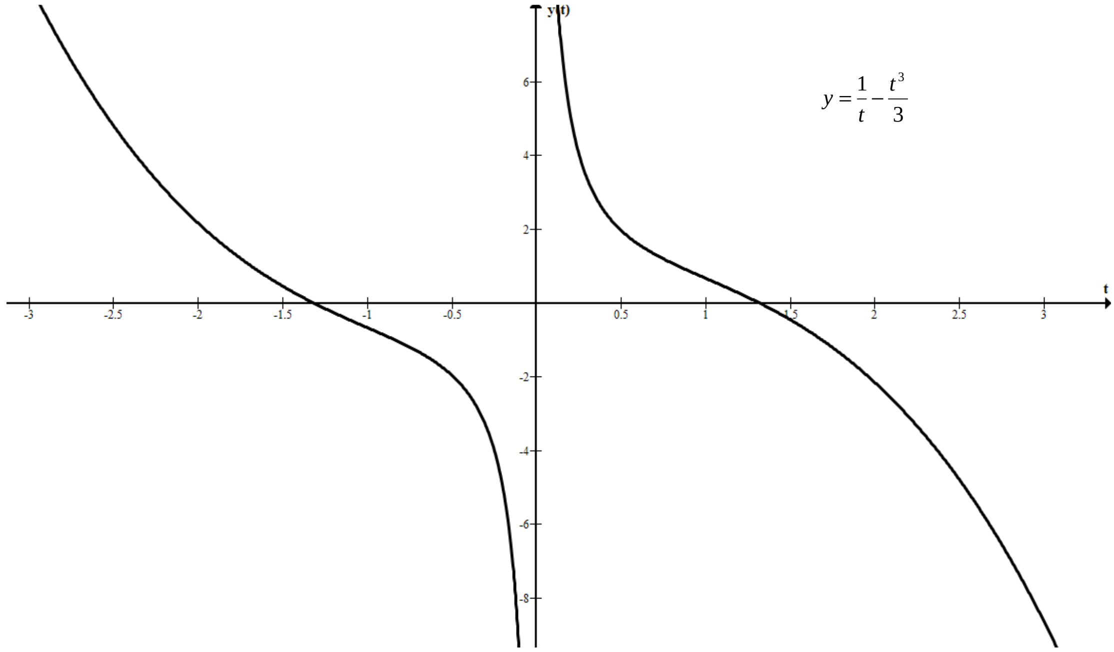
$y = \frac{1}{t} - \frac{t^3}{3}$

$\lim\limits_{t\to0+} y(t) = \lim\limits_{t\to0+}(\frac{1}{t} - \frac{t^3}{3}) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to0-} y(t) = \lim\limits_{t\to0-}(\frac{1}{t} - \frac{t^3}{3}) = -\infty \Rightarrow t=0-$ вертикальная асимптота.

$k = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{y(t)}{t} = \lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{t^2}{3}\right) = \infty -$ наклонных асимптот нет.

Исходя из исследований, строим график координатных функций x(t) и y(t).





4. Определяем знаки первой производной функции. Заданной параметрически.

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{-\frac{1}{t^2}-t^2}{\frac{t^2+2t}{(t+1)^2}}=\frac{(-1-t^4)(t+1)^2}{t^2(t^2+2t)}=$$

$$=-\frac{(1+t^4)(t+1)^2}{t^3(t+2)}$$

y': $-$ (○ -2) $+$ (● -1) $+$ (○ 0) $-$

5. Определяем знаки второй производной функции, заданной параметрически.

$$y''_x=\frac{x'_t y''_t-y'_t x''_t}{(x'_t)^3}=\frac{\frac{t^2+2t}{(t+1)^2}\cdot\frac{2-2t^4}{t^3}+\frac{1+t^4}{t^2}\cdot\frac{2}{(t+1)^3}}{\left(\frac{t^2+2t}{(t+1)^2}\right)^3}=$$

$$=\frac{(t^2+2t)\cdot(2-2t^4)(t+1)+(1+t^4)\cdot 2t}{\left(\frac{t^2+2t}{(t+1)^2}\right)^3(t+1)^3t^3}=$$

$$=\frac{\left(2t^3+4t^2-2t^7-4t^6+2t^2+4t-2t^6-4t^5+2t+2t^5\right)(t+1)^6}{\left(t^2+2t\right)^3(t+1)^3t^3}=$$

$$=\frac{\left(-2t^7-6t^6-2t^5+2t^3+6t^2+6t\right)(t+1)^3}{\left(t^2+2t\right)^3t^3}=\frac{-2\left(t^6+3t^5+t^4-t^2-3t-3\right)(t+1)^3}{\left(t+2\right)^3t^5}$$

y'': $+$ (● $-2{,}6$) $-$ (○ -2) $+$ (● -1) $-$ (○ 0) $+$ (● $1{,}1$) $-$

6. Находим асимптоты функции, заданной параметрически.

Ищем значения t_0 при стремлении к которым хотя бы одна из координатных функций x(t) или y(t) стремится к бесконечности. В данном случае это только $t_0=-1$, $t_0=0$ или $t_0=\infty$.

а) $t_0=-1$.

Так как $\lim\limits_{t\to -1} x(t)=\infty$ и $\lim\limits_{t\to -1} y(t)=-\frac{2}{3}$, то асимптота может быть только наклонной (если существует).

$$k=\lim_{t\to -1}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{t\to -1}\frac{\frac{1}{t}-\frac{t^3}{3}}{\frac{t^2}{t+1}}=\lim_{t\to -1}\frac{(3-t^4)(t+1)}{3t^3}=0;$$

$$l=\lim_{t\to -1}(y(t)-kx(t))=\lim_{t\to -1}(\frac{1}{t}-\frac{t^3}{3})=-\frac{2}{3}$$

Так как k и l существуют и конечны, то $y=-\frac{2}{3}$ – наклонная асимптота.

Проанализируем взаимное положение графика функции и графика асимптоты. $y(t)-kx(t)-l=\frac{1}{t}-\frac{t^3}{3}+\frac{2}{3}$. Эта разность положительна при $-\infty<t<-1$, $0<t<1{,}575$, и следовательно, график функции лежит выше асимптоты, и разность отрицательна при $-1<t<0$, и $t>1.575$, значит, при таких t график лежит ниже асимптоты.

б) $t_0=0$.

Так как $\lim\limits_{t\to 0} x(t)=0$ и $\lim\limits_{t\to 0} y(t)=\infty$, то асимптота может быть только наклонной (если существует).

$$k=\lim_{t\to 0}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{t}-\frac{t^3}{3}}{\frac{t^2}{t+1}}=\lim_{t\to 0}\frac{(3-t^4)(t+1)}{3t^3}=\infty,$$ следовательно, асимптоты не существует.

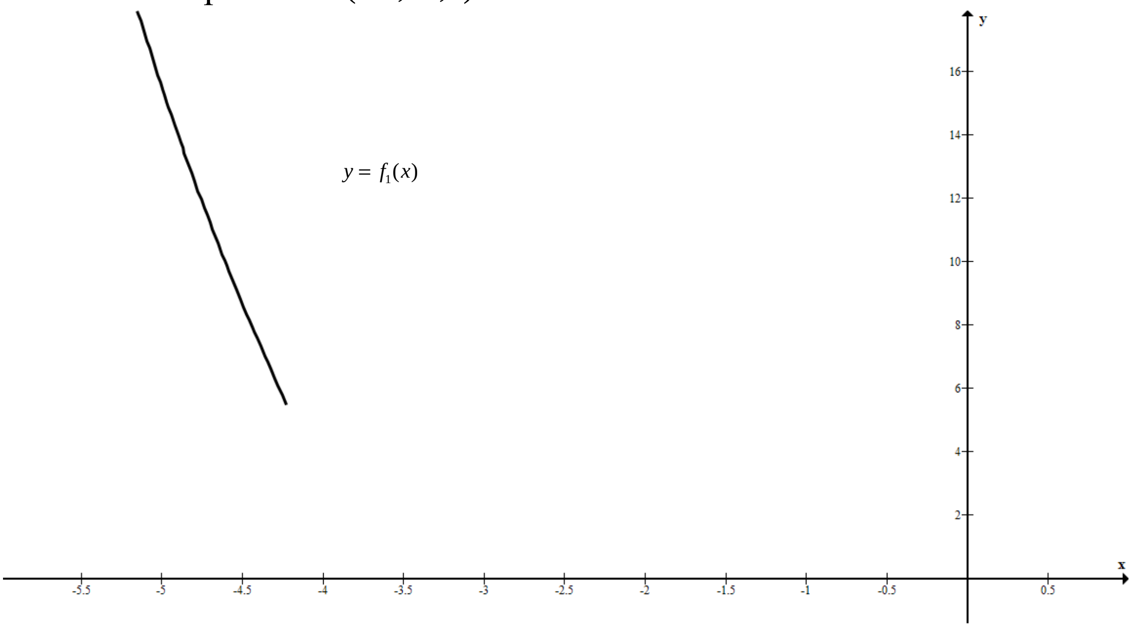
в) $t_0=\infty$

Так как $\lim\limits_{t\to \infty} x(t)=\infty$ и $\lim\limits_{t\to \infty} y(t)=\infty$, то асимптота может быть только наклонной (если существует).

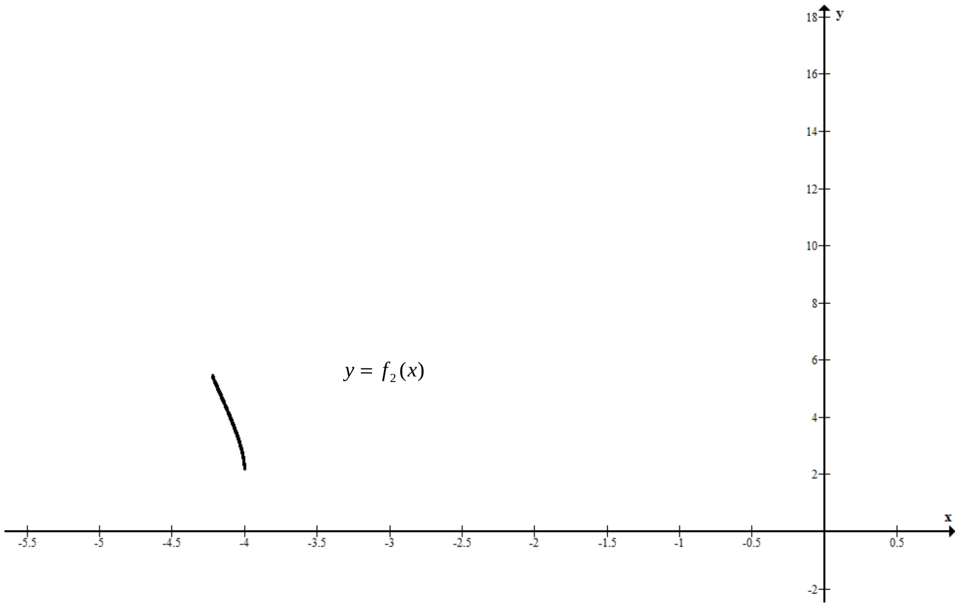
$$k=\lim_{t\to \infty}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{t\to \infty}\frac{\frac{1}{t}-\frac{t^3}{3}}{\frac{t^2}{t+1}}=\lim_{t\to \infty}\frac{(3-t^4)(t+1)}{3t^3}=\infty,$$ следовательно, асимптоты не существует.

7. Определяем функции от переменной x, объединение графиков которых, дает график функции, заданной параметрически.

Функцию, заданную параметрически, можно представить в виде однозначной функции на интервалах, на которых производная имеет постоянный знак. В данном случае таких интервалов шесть:
$(-\infty;-2{,}6), (-2{,}6;-2), (-2;-1), (-1;0), (0;1{,}1), (1{,}1;+\infty)$.
Для каждого случая построим график:
а) $t \in (-\infty;-2{,}6)$.
Обозначим за $y = f_1(x)$. Используя графики функций x = x(t), y = y(t) (пункт 1) получаем, что $x \in (-\infty;-4{,}2)$, $y \in (5{,}47;+\infty)$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-4{,}2} f_1(x) = 5{,}47$.
По пункту 4 первая производная $y'_x < 0$ при $t \in (-\infty;-2{,}6)$, а по пункту 5 вторая производная $y''_{xx} > 0$. Следовательно, функция $y = f_1(x)$ убывает и выпукла вниз на интервале $x \in (-\infty;-4{,}2)$.

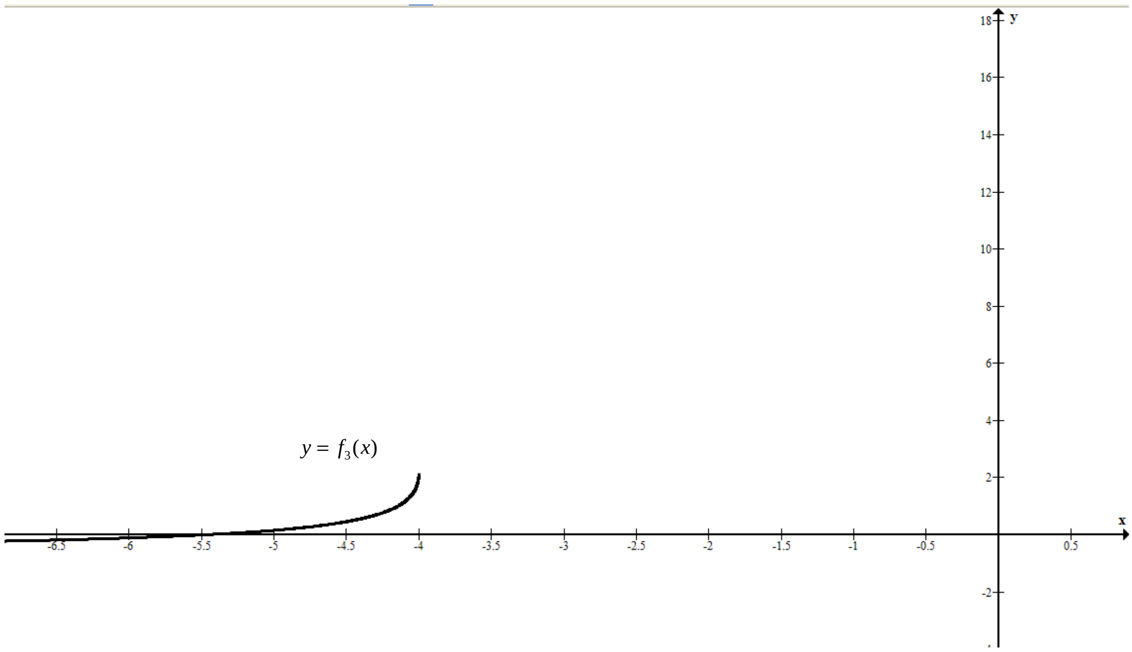


б) $t \in (-2{,}6;-2)$.
Обозначим за $y = f_2(x)$. Используя графики функций x = x(t), y = y(t) (пункт 1) получаем, что $x \in (-4{,}2;-4)$, $y \in (2{,}2;5{,}47)$. По пункту 4 первая производная $y'_x < 0$ при $t \in (-2{,}6;-2)$, а по пункту 5 вторая производная $y''_{xx} < 0$. Следовательно, функция $y = f_2(x)$ убывает и выпукла вверх на интервале $x \in (-4{,}2;-4)$.



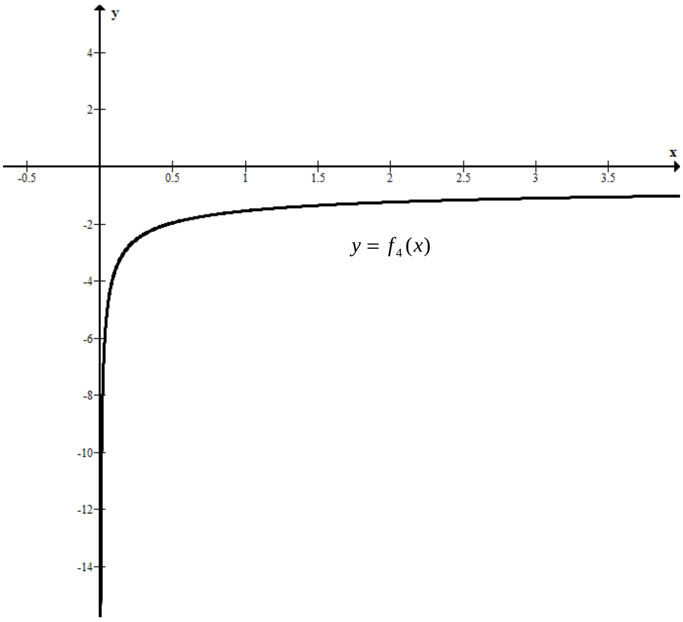
в) $t \in (-2;-1)$.

Обозначим за $y = f_3(x)$. Используя графики функций x = x(t), y = y(t) (пункт 1) получаем, что $x \in (-\infty;-4)$, $y \in (-0{,}7;2{,}2$. По пункту 4 первая производная $y'_x > 0$ при $t \in (-2;-1)$, а по пункту 5 вторая производная $y''_{xx} > 0$. Следовательно, функция $y = f_3(x)$ возрастает и выпукла вниз на интервале $x \in (-\infty;-4)$.



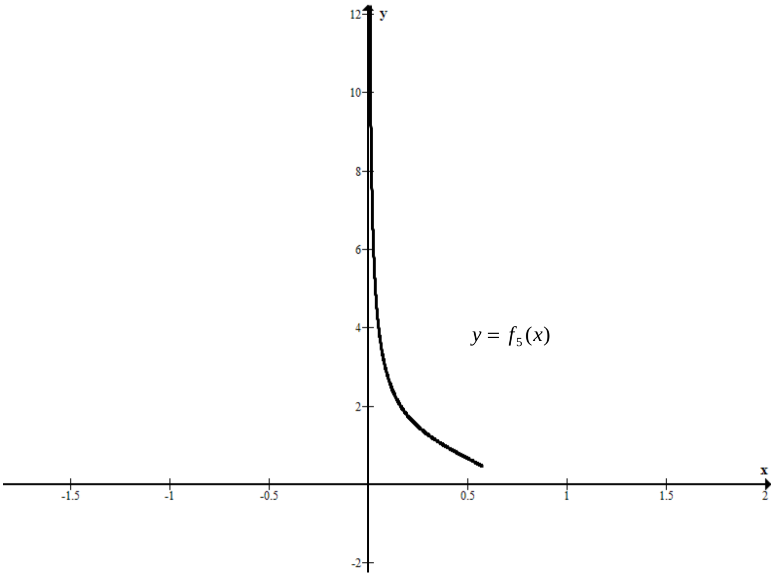
г) $t \in (-1;0)$.

Обозначим за $y = f_4(x)$. Используя графики функций x = x(t), y = y(t) (пункт 1) получаем, что $x \in (0;\infty)$, $y \in (-\infty;-0{,}7)$. По пункту 4 первая производная $y'_x > 0$ при $t \in (-1;0)$, а по пункту 5 вторая производная $y''_{xx} < 0$. Следовательно, функция $y = f_4(x)$ возрастает и выпукла вверх на интервале $x \in (0;\infty)$.



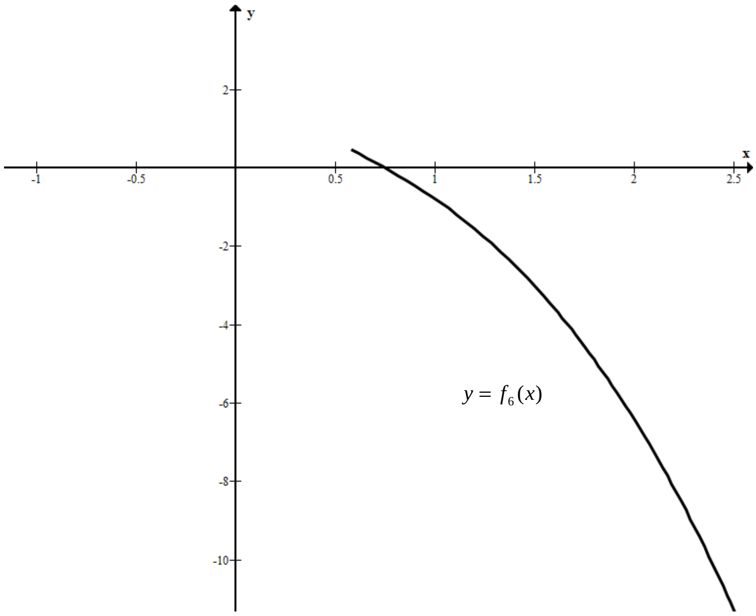
д) $t \in (0;1,1)$.

Обозначим за $y = f_5(x)$. Используя графики функций x = x(t), y = y(t) (пункт 1) получаем, что $x \in (0;0,6)$, $y \in (0,46;+\infty)$. По пункту 4 первая производная $y'_x < 0$ при $t \in (0;1,1)$, а по пункту 5 вторая производная $y''_{xx} > 0$. Следовательно, функция $y = f_5(x)$ убывает и выпукла вниз на интервале $x \in (0;0,6)$.



е) $t \in (1.1;+\infty)$.

Обозначим за $y = f_6(x)$. Используя графики функций x = x(t), y = y(t) (пункт 1) получаем, что $x \in (0,6;+\infty)$, $y \in (-\infty;0.46)$. По пункту 4 первая производная $y'_x < 0$ при $t \in (1.1;+\infty)$, а по пункту 5 вторая производная $y''_{xx} < 0$. Следовательно, функция $y = f_6(x)$ убывает и выпукла вверх на интервале $x \in (0,6;+\infty)$.



Объединяя графики получим график исходной функции, заданной параметрически.