Пример решения задачи:
Исследование функции в полярных координатах. Построение графика

Задание.

Исследовать функцию и построить ее график. $r = 1 + tg\varphi$.

Решение.

1. Область определения функции.

Для $r \geq 0$ $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$.

2. Функция ни четная, ни нечетная, то есть общего вида так как

$r(-\varphi) = 1 - tg\varphi \neq \pm r(\varphi)$.

3. Видно, что функция периодическая с главным периодом π.

4. Вычислим производную функции:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi}.$$

Так как производная не равна нулю, то функция критических точек не имеет.

Стационарные точки $\varphi \neq \pm\frac{\pi}{2}$, $\varphi \neq \frac{3\pi}{2}$.

Производная положительна на всей области определения, следовательно, модуль радиус-вектора возрастает на всей области определения.

5. Исследуем вторую производную.

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2} = -\frac{2\sin\varphi}{\cos^3\varphi}.$$

Решим уравнение $\frac{d^2r}{d\varphi^2} = 0$.

$$-\frac{2\sin\varphi}{\cos^3\varphi} = 0;$$

$$\varphi = 0, \varphi = \pi, x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \; x \neq \frac{3\pi}{2}.$$

При $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$ $\frac{d^2r}{d\varphi^2} > 0$, следовательно, кривая вогнута;

при $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ $\frac{d^2r}{d\varphi^2} < 0$, следовательно, кривая выгнута;

при $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ $\frac{d^2r}{d\varphi^2} > 0$, следовательно, кривая вогнута;

при $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ $\frac{d^2r}{d\varphi^2} < 0$, следовательно, кривая выгнута.

Следовательно, точки $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ – точки перегиба.

$r(0) = 1$, $r(\pi) = 1$.

6. Асимптоты.

В точках $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$ $r \to \infty$.

Проверим наличие наклонных асимптот в этих точках.

Наклонная асимптота имеет вид $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = 0,\ b = \lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2}} (r\sin\varphi - kr\cos\varphi) = \lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2}} ((1 + tg\varphi)\sin\varphi) = \infty .$$

Так как предел равен бесконечности, следовательно, наклонных асимптот нет.

$$k = \lim_{\varphi \to \frac{3\pi}{2}} \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = 0,\ b = \lim_{\varphi \to \frac{3\pi}{2}} (r\sin\varphi - kr\cos\varphi) = \lim_{\varphi \to \frac{3\pi}{2}} ((1 + tg\varphi)\sin\varphi) = \infty .$$

Так как предел равен бесконечности, следовательно, наклонных асимптот нет.

Проверим наличие вертикальных асимптот.

Так как $\lim\limits_{\varphi \to \frac{\pi}{2}} r = \infty$ и $\lim\limits_{\varphi \to \frac{\pi}{2}} r\cos\varphi = \lim\limits_{\varphi \to \frac{\pi}{2}} (\cos\varphi + \sin\varphi) = 1$, следовательно, $r = \frac{1}{\cos\varphi}$ – вертикальная асимптота.

Так как $\lim\limits_{\varphi\to\frac{3\pi}{2}} r=\infty$ и $\lim\limits_{\varphi\to\frac{3\pi}{2}} r\cos\varphi=\lim\limits_{\varphi\to\frac{3\pi}{2}}(\cos\varphi+\sin\varphi)=-1$, следовательно, $r=-\dfrac{1}{\cos\varphi}$ – вертикальная асимптота.

7. На основании проведенных исследований строим график функции.