Тема: Линейное программирование

ЗАДАНИЕ. Предприятие производит 3 вида продукции: A_1, A_2, A_3, используя сырьё двух типов. Известны затраты сырья каждого типа на единицу продукции, запасы сырья на планируемый период, а также прибыль от единицы продукции каждого вида.

Сырьё	Затраты сырья на единицу продукции			Запас сырья
	A_1	A_2	A_3	
I	3,5	7	4,2	1400
II	4	5	8	2000
Прибыль от ед. прод.	1	3	3	

1) Сколько изделий каждого вида необходимо произвести, чтобы получить максимум прибыли?
2) Определить статус каждого вида сырья и его удельную ценность.
3) Определить максимальный интервал изменения запасов каждого вида сырья, в пределах которого структура оптимального плана, т.е. номенклатура выпуска, не изменится.
4) Определить количество выпускаемой продукции и прибыль от выпуска при увеличении запаса одного из дефицитных видов сырья до максимально возможной (в пределах данной номенклатуры выпуска) величины.
5) Определить интервалы изменения прибыли от единицы продукции каждого вида, при которых полученный оптимальный план не изменится.

РЕШЕНИЕ.

1) Составим математическую модель задачи. Пусть x1, x2, x3 соответственно -количество единиц продукции A1, A2, A3, которую производит предприятие. По смыслу задачи эти переменные неотрицательны.
Тогда $f(x1, x2, x3) = x1 + 3\,x2 + 3\,x3$ – совокупная прибыль от продажи произведенной продукции, которую требуется максимизировать.
Подсчитаем затраты сырья:
Сырье 1-го типа: $3{,}5\,x1 + 7\,x2 + 4{,}2\,x3$, по условию затраты не превосходят 1400,
Сырье 2-го типа: $4\,x1 + 5\,x2 + 8\,x3$, по условию затраты не превосходят 2000.

Пришли к задаче линейного программирования:
$f(x1, x2, x3) = x1 + 3\,x2 + 3\,x3 \to \max$,
$3{,}5\,x1 + 7\,x2 + 4{,}2\,x3 \le 1400$,
$4\,x1 + 5\,x2 + 8\,x3 \le 2000$,
$x1 \ge 0,\ x2 \ge 0,\ x3 \ge 0$.

Преобразуем первое ограничение:
$3{,}5\,x1 + 7\,x2 + 4{,}2\,x3 \le 1400$, (поделим на 7)
$0{,}5\,x1 + 1\,x2 + 0{,}6\,x3 \le 200$, (умножим на 10)
$5\,x1 + 10\,x2 + 6\,x3 \le 2000$.

Получили задачу:
$f(x1, x2, x3) = x1 + 3\,x2 + 3\,x3 \to \max$,
$5\,x1 + 10\,x2 + 6\,x3 \le 2000$,
$4\,x1 + 5\,x2 + 8\,x3 \le 2000$,
$x1 \ge 0,\ x2 \ge 0,\ x3 \ge 0$.

Решим данную задачу симплекс-методом. Введем дополнительные переменные x4, x5 для приведения задачи к каноническому виду:
f(x1, x2, x3) = x1 + 3 x2 + 3 x3 → max,
5 x1 + 10 x2 + 6 x3 + x4 = 2000,
4 x1 + 5 x2 + 8 x3 + x5 = 2000,
x1 ≥ 0, x2 ≥ 0, x3 ≥ 0, x4 ≥ 0, x5 ≥ 0.

В качестве опорного плана выберем X=(0, 0, 0, 2000, 2000). Составим симплекс-таблицу.

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5	δ ij
x4	2000	5	**10**	6	1	0	200
x5	2000	4	5	8	0	1	400
f	0	-1	-3	-3	0	0	

В последней оценочной строке есть отрицательные оценки, поэтому нужно делать шаг симплекс-метода. Выбираем столбец с наименьшей оценкой, а затем разрешающий элемент – по наименьшему отношению свободных членов к коэффициентам столбца (отношения записаны в последнем столбце). Результат шага запишем в таблицу (разрешающий элемент будем выделять жирным). Аналогично будем повторять шаги, пока не придем к таблице с неотрицательными оценками.

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5	δ ij
x2	200	1/2	1	3/5	1/10	0	1000/3
x5	1000	3/2	0	**5**	-1/2	1	1000/5
f	600	1/2	0	-6/5	3/10	0	

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5	δ ij
x2	80	8/25	1	0	4/25	-3/25	
x3	200	3/10	0	1	-1/10	1/5	
f	840	43/50	0	0	9/50	6/25	

В последнем плане строка f не содержит отрицательных значений, план **x1 = 0, x2 = 80, x3 = 200** оптимален, целевая функция принимает максимальное значение **840** (совокупная прибыль).

2) Дадим экономическую интерпретацию оптимального плана. Согласно этому плану необходимо произвести 0 единиц продукции типа А1, 80 единиц продукции типа А2, 200 единиц продукции типа А3.

В строке f оптимального плана в столбцах дополнительных переменных y*=(9/50, 6/25). Двойственные оценки определяют дефицитность сырья. Так как y1*=9/50>0, y2*=6/25>0, то, согласно второй теореме двойственности сырье и 1го, и 2го типов полностью используется в оптимальном плане и является дефицитным сырьем.

Кроме того, значения двойственных оценок показывают, насколько возрастает доход предприятия при увеличении дефицитного сырья на единицу (соответственно, на 9/50 и на 6/25).

3) Определим максимальный интервал изменения запасов каждого вида сырья, в пределах которого структура оптимального плана, т.е. номенклатура выпуска, не изменится. Другими словами, проведем анализ устойчивости двойственных оценок, определив для каждого типа сырья предельные изменения. Предельные изменения найдем из двойного неравенства:

$$\max_{k_{ij}>0}(-x_j^*/k_{ij}) \le \Delta b_i \le \min_{k_{ij}<0}(-x_j^*/k_{ij})$$

где Δb_i - величина изменения i-го типа сырья,
k_{ij} – коэффициенты структурных сдвигов.

Для первого типа сырья имеем: k_{12}= 4/25, k_{13} = -1/10.

$$\max(-80/4*25) \le \Delta b_1 \le \min(200*10)$$

$-500 \le \Delta b_1 \le 2000$. Таким образом, интервал устойчивости двойственной оценки [b_1-500, b_1 + 2000] = [2000-500, 2000+2000] = [1500, 4000].

Аналогичным образом для второго типа сырья имеем: k_{22}= -3/25, k_{23} = 1/5.

$$\max(80*5) \le \Delta b_2 \le \min(200/3*25)$$

$-400 \le \Delta b_3 \le 1667$. Таким образом, интервал устойчивости двойственной оценки [b_3-400, b_3 + 1667] = [2000-400, 2000+1667]= [1600, 3667].

4) Используя коэффициенты структурных сдвигов в оптимальной симплекс-таблице, выполним расчет оптимального плана при увеличении запаса первого типа (дефицитного вида сырья) до максимально возможной величины 4000 (т.е. при увеличении на 2000 ед.).

Базис	План	x4	Изменение	Новый план
x2	80	0,16	320	400
x3	200	-0,10	-200	0
f	840	0,18	360	1200

Таким образом, в результате увеличения количества дефицитного сырья 1го типа на 2000 единиц, объем продаж продукции типа А2 увеличится на 320 единиц, а типа А3 уменьшится на 200 единиц. Суммарная прибыль предприятия увеличится на 360 и составит **1200**.

5) Определить интервалы изменения прибыли от единицы продукции каждого вида, при которых полученный оптимальный план не изменится.

Определим интервал изменения параметра c1=1. Пусть новое значение **c1** = c1+e1, оценим параметр e1. Столбец x1 не входит в базис (смотрим последнюю симплекс-таблицу), поэтому для сохранения оптимальности плана нужно, чтобы оценка в данном столбце осталась положительной:

$3*8/25+3*3/10-1 - e1 > 0$, т.е. $e1 < 43/50$.

Таким образом, если значение c1 не превосходит $1+43/50 = 93/50$, оптимальный план не изменится.

Определим интервал изменения параметра $c2=3$. Пусть новое значение **c2** = c2+e2, оценим параметр e2. Столбец x2 входит в базис (смотрим последнюю симплекс-таблицу), поэтому для сохранения оптимальности плана нужно, чтобы оценки для всех небазисных столбцов остались положительны:

Столбец 1: $8/25\ e2 > 1-3*8/25-3*3/10$, $e2 > -43/16$,
Столбец 2: $4/25\ e2 > 0-12/25+3/10$, $e2 > -9/8$,
Столбец 3: $-3/25\ e2 > 0+9/25-3/5$, $e2 < 2$.
Т.е. $-9/8 < e2 < 2$.

Таким образом, если значение c2 изменяется в пределах от $3-9/8=15/8$ до $3+2=5$, то оптимальный план не изменится.

Определим интервал изменения параметра $c3=3$. Пусть новое значение **c3** = c3+e3, оценим параметр e3. Столбец x3 входит в базис (смотрим последнюю симплекс-таблицу), поэтому для сохранения оптимальности плана нужно, чтобы оценки для всех небазисных столбцов остались положительны:

Столбец 1: $3/10\ e3 > 1-3*8/25-3*3/10$, $e3 > -43/15$,
Столбец 2: $-1/10\ e3 > 0-12/25+3/10$, $e3 < 9/5$,
Столбец 3: $1/5\ e3 > 0+9/25-3/5$, $e3 >-6/5$.
Т.е. $-6/5 < e3 < 9/5$.

Таким образом, если значение c3 изменяется в пределах от $3-6/5=9/5$ до $3+9/5=24/5$, то оптимальный план не изменится.