

Тема: Дробно-линейное программирование

ЗАДАНИЕ. Решить задачу дробно-линейного программирования:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 + 4x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$z = \frac{2x_1 + x_2}{1,5x_1 + x_2 + 4} \rightarrow \max$$

РЕШЕНИЕ. Сведем данную задачу к задаче линейного программирования. Сначала введем дополнительные переменные, чтобы привести задачу к каноническому виду:

$$z = \frac{2x_1 + x_2}{1,5x_1 + x_2 + 4} \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 10, \\ x_i \geq 0, i=1,2,3,4. \end{cases}$$

Обозначим $y_0 = \frac{1}{1,5x_1 + x_2 + 4}$, $y_j = y_0 \cdot x_j, j = 1, 2, 3, 4$.

Тогда задача принимает вид

$$\begin{cases} f = 2y_1 + y_2 \rightarrow \max \\ -10y_0 + 4y_1 + y_2 + y_3 = 0, \\ -10y_0 + y_1 + 4y_2 + y_4 = 0, \\ 4y_0 + 1,5y_1 + y_2 = 1, \\ y_i \geq 0, i=0,1,2,3,4 \end{cases}$$

Решим полученную задачу симплекс-методом. Введем дополнительную переменную, чтобы получить единичный базис:

$$\begin{cases} f = 2y_1 + y_2 - Mz \rightarrow \max \\ -10y_0 + 4y_1 + y_2 + y_3 = 0, \\ -10y_0 + y_1 + 4y_2 + y_4 = 0, \\ 8y_0 + 3y_1 + 2y_2 + z = 2, \\ y_i \geq 0, i=0,1,2,3,4 \end{cases}$$

Составляем симплекс-таблицу.

Базис	План	y0	y1	y2	y3	y4	z
y3	0	-10	4	1	1	0	0
y4	0	-10	1	4	0	1	0
z	2	8	3	2	0	0	1
f	-2M	-8M	-3M-2	-2M-1	0	0	0

В последней оценочной строке есть отрицательные оценки (смотрим на коэффициенты при M, пока искусственный базис не выйдет), поэтому нужно делать шаг симплекс-метода. Выбираем столбец с наименьшей оценкой, а затем разрешающий

элемент – по наименьшему отношению свободных членов к коэффициентам столбца (последний столбец). Результат шага запишем в таблицу (разрешающий элемент будем выделять жирным). Аналогично будем повторять шаги.

Базис	План	y0	y1	y2	y3	y4	z
y3	5/2	0	31/4	7/2	1	0	5/4
y4	5/2	0	19/4	13/2	0	1	5/4
y0	1/4	1	3/8	1/4	0	0	1/8
F	0	0	-2	-1	0	0	M

Базис	План	y0	y1	y2	y3	y4	z
y1	10/31	0	1	14/31	4/31	0	5/31
y4	30/31	0	0	135/31	-19/31	1	15/31
y0	4/31	1	0	5/62	-3/62	0	2/31
f	20/31	0	0	-3/31	8/31	0	M+10/31

Базис	План	y0	y1	y2	y3	y4	z
y1	2/9	0	1	0	26/135	-14/135	1/9
y2	2/9	0	0	1	-19/135	31/135	1/9
y0	1/9	1	0	0	-1/27	-1/54	1/18
f	2/3	0	0	0	11/45	1/45	M+1/3

Получили решение

$$y_0 = 1/9$$

$$y_1 = 2/9$$

$$y_2 = 2/9$$

$$f = 2/3$$

Тогда, возвращаясь к исходным переменным, получим:

$$x_1 = y_1/y_0 = 2, x_2 = y_2/y_0 = 2, z_{\max} = 2/3$$