Составление, решение и анализ задачи линейного программирования в Excel

Задание.

Построить математическую модель задачи и решить её средствами Excel. Записать сопряжённую задачу. Провести анализ и сделать выводы по полученным результатам.

Для производства столов и шкафов мебельная фабрика использует различные ресурсы. Нормы затрат ресурсов на одно изделие данного вида, прибыль от реализации одного изделия и общее количество имеющихся ресурсов каждого вида приведены в таблице.

Ресурсы	*Нормы расхода ресурсов на одно изделие*		*Общее количество ресурсов*
	стол	*шкаф*	
Древесина 1 вида	*0,2*	*0,1*	*40*
Древесина 2 вида	*0,1*	*0,3*	*60*
Трудоемкость	*1,2*	*1,5*	*371,1*
Прибыль от реализации одного изделия	*6*	*9*	

Определить, сколько столов и шкафов фабрике следует выпускать, чтобы прибыль от реализации была максимальной.

Решение.

Составим математическую модель задачи. Пусть фабрика изготавливает x_1 столов и x_2 шкафов. По смыслу задачи эти переменные неотрицательны, $x_1, x_2 \ge 0$. Прибыль от реализации такого количества шкафов и столов составит $F = 6x_1 + 9x_2$ рублей, ее нужно максимизировать:
$F = 6x_1 + 9x_2 \to \max$.

Теперь составим ограничения задачи.
Для изготовления x_1 столов и x_2 шкафов потребуется $0,2x_1 + 0,1x_2$ древесины первого вида, запасы которой составляют 40 куб.м., поэтому $0,2x_1 + 0,1x_2 \le 40$, или $2x_1 + x_2 \le 400$.
Для изготовления x_1 столов и x_2 шкафов потребуется $0,1x_1 + 0,3x_2$ древесины второго вида, запасы которой составляют 60 куб.м., поэтому $0,1x_1 + 0,3x_2 \le 60$, $x_1 + 3x_2 \le 600$.
Для изготовления x_1 столов и x_2 шкафов потребуется $1,2x_1 + 1,5x_2$ древесины третьего вида, запасы которой составляют 371,1 куб.м., поэтому $1,2x_1 + 1,5x_2 \le 371,1$, $12x_1 + 15x_2 \le 3711$,
$4x_1 + 5x_2 \le 1237$.

Получаем задачу линейного программирования:

$$F = 6x_1 + 9x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 400, \\ x_1 + 3x_2 \le 600, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 1237, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решим задачу средствами Excel. Заполним ячейки исходными данными (в виде таблицы) и формулами математической модели. Вычисляемые ячейки пометим цветом.

Таблице в режиме чисел:

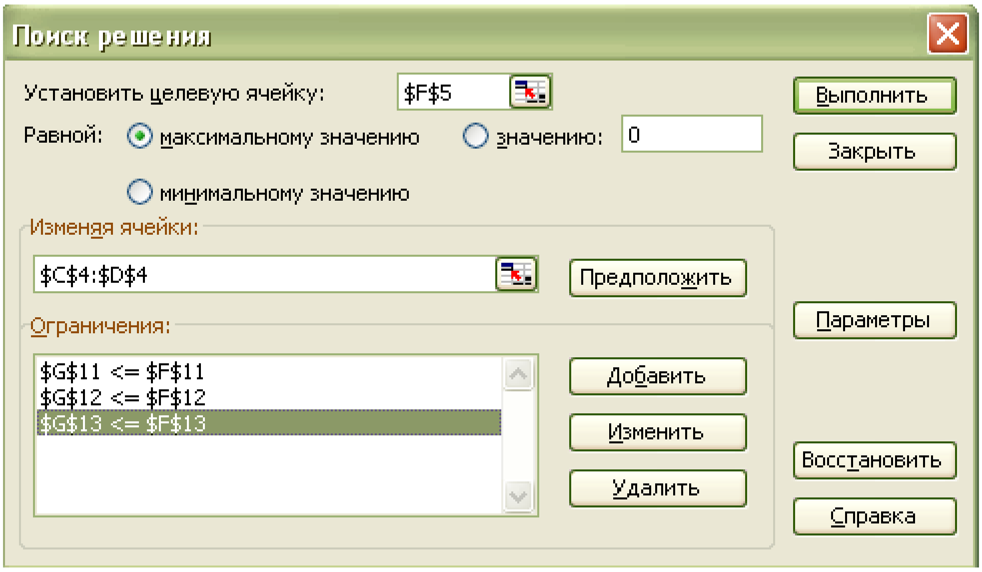
	A	B	C	D	E	F	G
1		**Основные переменные и целевая функция**					
2							
3			Стол	Шкаф		Целевая	
4			0	0		функция	
5		Прибыль	6	9		0	max
6							
7							
8							
9		**Требуется для производства (ограничения):**					
10							
11		Древесина 1	0,2	0,1	<=	40	0
12		Древесина 2	0,1	0,3	<=	60	0
13		Трудоемкость	1,2	1,5	<=	371,1	0
14							

Таблица в режиме формул:

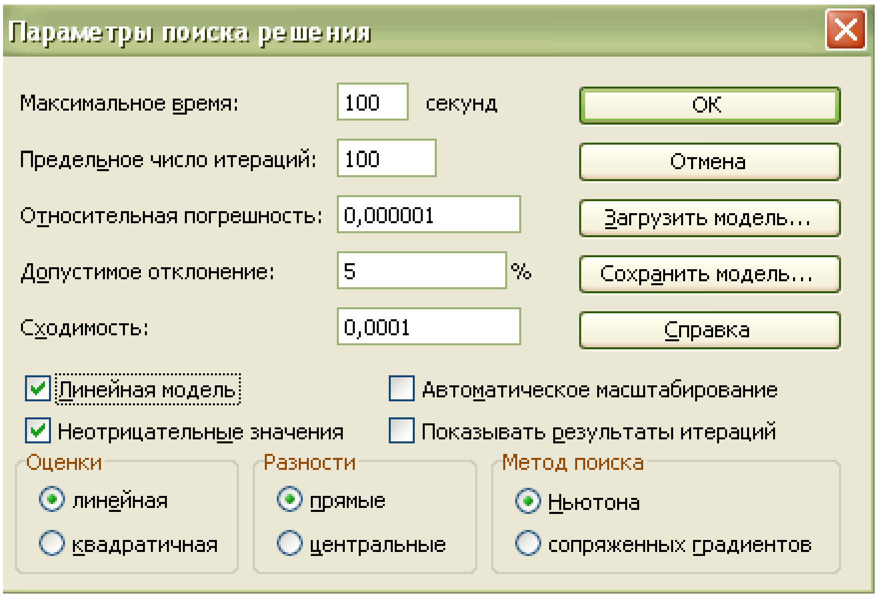
	A	B	C	D	E	F	G
1		**Основные переменные и цел**					
2							
3			Стол	Шкаф		Целевая	
4			0	0		функция	
5		Прибыль	6	9		=СУММПРОИЗВ(C4:	max
6							
7							
8							
9		**Требуется для производства**					
10							
11		Древесина 1	0,2	0,1	<=	40	=СУММПРОИЗВ(C11
12		Древесина 2	0,1	0,3	<=	60	=СУММПРОИЗВ(C12
13		Трудоемкость	1,2	1,5	<=	371,1	=СУММПРОИЗВ(C13
14							

Вызываем надстройку «Поиск решения» и заполняем параметры:

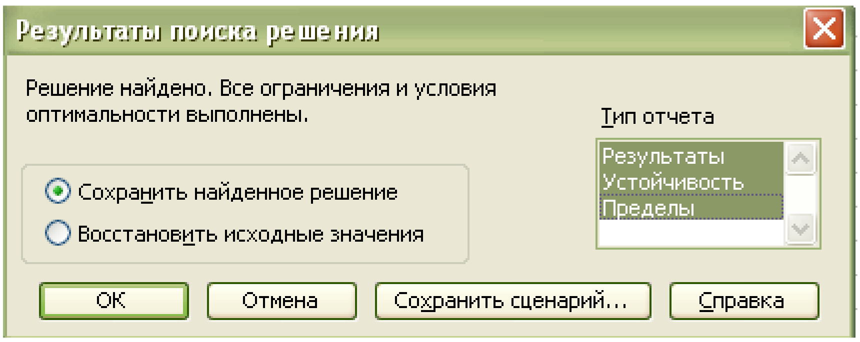
Вносим целевую функцию и ограничения.



Указываем линейность задачи и неотрицательность переменных:



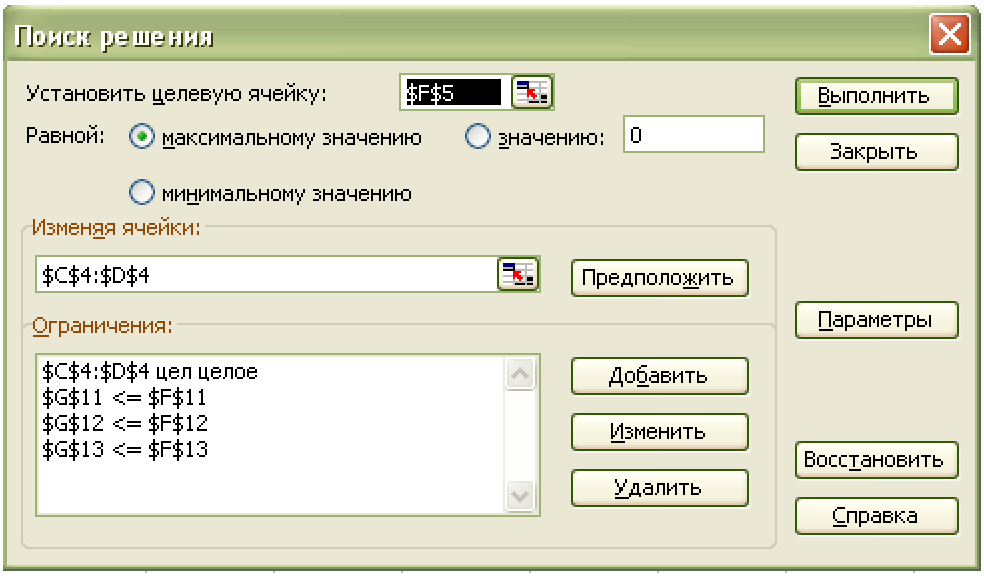
Запускаем решение:



Получаем решение:

	A	B	C	D	E	F	G
1		**Основные переменные и целевая функция**					
2							
3			Стол	Шкаф		Целевая	
4			101,5714	166,1429		функция	
5		Прибыль	6	9		2104,714	max
6							
7							
8							
9		**Требуется для производства (ограничения):**					
10							
11		Древесина 1	0,2	0,1	<=	40	36,92857
12		Древесина 2	0,1	0,3	<=	60	60
13		Трудоемкость	1,2	1,5	<=	371,1	371,1
14							

Получили нецелочисленное решение – 101,571 столов и 166,143 стульев. Чтобы получить более «реальное» в экономическом смысле решение, добавим ограничение целочисленности переменных, тогда получим:



Искомое решение:

	A	B	C	D	E	F	G
1		**Основные переменные и целевая функция**					
2							
3			Стол	Шкаф		Целевая	
4			103	165		функция	
5		Прибыль	6	9		2103	max
6							
7							
8							
9		**Требуется для производства (ограничения):**					
10							
11		Древесина 1	0,2	0,1	<=	40	37,1
12		Древесина 2	0,1	0,3	<=	60	59,8
13		Трудоемкость	1,2	1,5	<=	371,1	371,1
14							

Таким образом, следует производить 103 стула и 165 шкафов, при этом прибыль от реализации будет максимальна и составит 2103 рубля. В процессе производства будут остатки древесины первого и второго типа: 2,9 и 0,2 кубометра соответственно. Трудоемкость будет «использована» в полном размере.

Эти же данные видны в отчете по результатам (см. последние два столбца последней таблицы):

Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [Расчеты_задание 2.xls]Лист1
Отчет создан: 27.04.2011 13:02:18

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$F$5	Прибыль функция	0	2103

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$C$4	Стол	0	103
$D$4	Шкаф	0	165

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$G$11	<= max	37,1	$G$11<=$F$11	не связан.	2,9
$G$12	<= max	59,8	$G$12<=$F$12	не связан.	0,2
$G$13	<= max	371,1	$G$13<=$F$13	связанное	0
$C$4	Стол	103	$C$4=целое	связанное	0
$D$4	Шкаф	165	$D$4=целое	связанное	0

Запишем сопряженную (двойственную задачу к исходной):

$$F = 6x_1 + 9x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 400, \\ x_1 + 3x_2 \le 600, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 1237, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Так как исходная задача была на максимум, двойственная задача будет на минимум, причем коэффициенты при переменных соответствуют правым частям ограничений, число переменных равно числу ограничений и равно трем:

$$W = 400y_1 + 600y_2 + 1237y_3 \to \min .$$

Строим ограничения, транспонируя матрицу коэффициентов в ограничениях. Так как и первая и вторая переменные были неотрицательны, первое и второе ограничение будут иметь знаки $\ge$. Так как все ограничения имеют знак $\le$, все двойственные переменные неотрицательны. Правые части ограничений – это коэффициенты при переменных в исходной целевой функции. Получаем:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 \geq 6, \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 9, \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Искомая двойственная задача:

$$W = 400y_1 + 600y_2 + 1237y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 \geq 6, \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 9, \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$