Приведение кривой 2 порядка к каноническому виду

Пример решения задачи по алгебре

Задача. *Линейным преобразованием координат привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и определить тип кривой.*

$$x^2-4xy+y^2+4x-2y+1=0$$

Решение

Слагаемые второй степени уравнения образуют квадратичную форму $x^2-4xy+y^2$, матрица которой имеет вид $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

В базисе из собственных векторов матрица квадратичной формы примет диагональный вид $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$, а квадратичная форма не будет содержать произведения xy.

Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение матрицы A: $\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$;

$(1-\lambda)^2-4=0$;

$1-\lambda=2$ или $1-\lambda=-2$.

$\lambda=-1$ $\qquad\lambda=3$

Корни характеристического уравнения являются собственными значениями матрицы A.

Найдем собственные векторы, соответствующие этим собственным значениям.

1) Для $\lambda=-1$ получим систему уравнений для нахождения координат первого собственного вектора $\begin{cases}(1+1)\xi_1-2\xi_2=0;\\ -2\xi_1+(1+1)\xi_2=0.\end{cases}$ $\begin{cases}2\xi_1-2\xi_2=0;\\ -2\xi_1+2\xi_2=0.\end{cases}$ $\xi_1=\xi_2$.

Полагая $\xi_1=t$ получим координаты первого собственного вектора $\overline{x_1}=\begin{pmatrix}t\\ t\end{pmatrix}$.

При $t=1$, получим $\overline{x_1}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

2) Для $\lambda=3$ получим систему уравнений для нахождения координат второго собственного вектора $\begin{cases}(1-3)\xi_1-2\xi_2=0;\\ -2\xi_1+(1-3)\xi_2=0.\end{cases}$ $\begin{cases}(-2\xi_1-2\xi_2=0;\\ -2\xi_1-2\xi_2=0.\end{cases}$ $\xi_1=-\xi_2$.

Полагая $\xi_2 = t$, получим координаты второго собственного вектора $\overline{x_2} = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$. При $t = 1$, получим $\overline{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\vec{e}_1 = \dfrac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|}$ и $\vec{e}_2 = \dfrac{\vec{x}_2}{|\vec{x}_2|}$

$\overline{x_1} = (1{,}1)$, $\quad |\overline{x_1}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $\overline{e_1} = \dfrac{(1;1)}{\sqrt{2}} = (\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}})$

$\overline{x_2} = (1{,}-1)$, $\quad |\overline{x_1}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$; $\overline{e_1} = \dfrac{(1;-1)}{\sqrt{2}} = (\dfrac{1}{\sqrt{2}}; -\dfrac{1}{\sqrt{2}})$

Базис $\overline{e_1} = (\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}})$, $\overline{e_1} = (\dfrac{1}{\sqrt{2}}; -\dfrac{1}{\sqrt{2}})$ является не только нормированным, но и ортогональным, так как $(e_1, e_2) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = 0$. Следовательно, при переходе от «старого» базиса $\vec{i}, \vec{j}$ к «новому» базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ не будет происходить искажения угловых размеров.

Запишем матрицу перехода $F = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ и уравнения, связывающие «старые» координаты x, y и «новые» координаты x', y':

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} x' + \dfrac{1}{\sqrt{2}} y'; \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} x' - \dfrac{1}{\sqrt{2}} y' \end{cases}$$

В базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$:

уравнение кривой $x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ примет вид :

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y')^2 - 4(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y')(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y') + (\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y')^2 + 4(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y') -$$
$$2(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y') + 1 = 0$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$\frac{1}{2}x'^2 + x'y' + \frac{1}{2}y'^2 - 4(\frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2) + \frac{1}{2}x'^2 - x'y' + \frac{1}{2}y'^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}x' + \frac{4}{\sqrt{2}}y' - \frac{2}{\sqrt{2}}x' + \frac{2}{\sqrt{2}}y' + 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 - 2x'^2 + 2y'^2 + \frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}x' + \frac{4}{\sqrt{2}}y' - \frac{2}{\sqrt{2}}x' + \frac{2}{\sqrt{2}}y' + 1 = 0$$

$$-x'^2+3y'^2+\frac{2}{\sqrt{2}}x'+\frac{6}{\sqrt{2}}y'+1=0$$

Выделив полные квадраты переменных x' и y', получим $-(x'^2-\frac{2}{\sqrt{2}}x')+3(y'^2+\frac{2}{\sqrt{2}}y')+1=0$;

$$-(x'-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}+3(y'+\frac{1}{\sqrt{2}})^2-\frac{3}{2}+1=0$$

$-(x'-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+3(y'+\frac{1}{\sqrt{2}})^2=0$ **- пара пересекающихся прямых.**