Ортогональное преобразование квадратичной формы

Пример решения задачи по алгебре

Задача. *Привести квадратичную форму к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования. Найти это преобразование, канонический базис, матрицу перехода к каноническому базису, убедиться, что в этом базисе матрица квадратичной формы является диагональной.*

$k(\vec{x}) = -2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}x_1x_3 + \sqrt{2}x_2x_3.$

Решение

Запишем матрицу квадратичной формы

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ -2 & 2 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{5\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 & \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ -2 & 2-\lambda & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{5\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 21\lambda + 18 = 0$$

$$(\lambda+6)(\lambda-1)(\lambda-3) = 0$$

$$\lambda = -6, 1, 3$$

При $\lambda = -6$ получаем $\begin{pmatrix} 4 & -2 & \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ -2 & 8 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{5\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$|X_1| = \sqrt{9+1+8} = 3\sqrt{2} \Rightarrow e_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{3\sqrt{2}}; \frac{2}{3}\right)$$

При $\lambda = 1$ получаем $\begin{pmatrix} -3 & -2 & \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ -2 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{5\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$|X_1| = \sqrt{1+1+2} = 2 \Rightarrow e_1\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

При $\lambda = 3$ получаем $\begin{pmatrix} -5 & -2 & \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ -2 & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{5\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow X_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$|X_3| = \sqrt{9+25+2} = 6 \Rightarrow e_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{6}; \frac{\sqrt{2}}{6}\right)$$

Тогда

$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}$ - ортогональное преобразование

Квадратичная форма будет иметь вид

$-6y_1^2 + y_2^2 + 3y_3^2$