

Исследование кривой второго порядка

Пример решения задачи по алгебре

Задача. Используя теорию квадратичных форм, исследовать кривую второго порядка заданную общим уравнением и построить ее.

$$-4xy - 4x + 4y + 6 = 0$$

Решение. Пусть

$$\begin{cases} x = x' \cos a - y' \sin a \\ y = x' \sin a + y' \cos a \end{cases}$$

Подставляем в уравнение:

$$\begin{aligned} -4xy - 4x + 4y + 6 &= \\ &= -4(x' \cos a - y' \sin a)(x' \sin a + y' \cos a) - 4(x' \cos a - y' \sin a) - 4(x' \sin a + y' \cos a) + 6 = 0 \end{aligned}$$

$$(x' \cos a - y' \sin a)(x' \sin a + y' \cos a) + (x' \cos a - y' \sin a) + (x' \sin a + y' \cos a) = \frac{3}{2}$$

$$x'^2 \cos a \sin a + x'y' \cos^2 a - x'y' \sin^2 a - y'^2 \cos a \sin a + (x' \cos a - y' \sin a) + (x' \sin a + y' \cos a) = \frac{3}{2}$$

$$x'^2 \cos a \sin a + x'y'(\cos^2 a - \sin^2 a) - y'^2 \cos a \sin a + x'(\cos a + \sin a) + y'(\cos a - \sin a) = \frac{3}{2}$$

$$x'^2 \cos a \sin a + x'y' \cos 2a - y'^2 \cos a \sin a + x'(\cos a + \sin a) + y'(\cos a - \sin a) = \frac{3}{2}$$

$$\cos 2a = 0 \Rightarrow 2a = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = \frac{\pi}{4}$$

Тогда,

$$x'^2 \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} - y'^2 \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} + x' \left(\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \right) + y' \left(\cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 + \sqrt{2}x' = \frac{3}{2}$$

$$x'^2 - y'^2 + 2\sqrt{2}x' = 3$$

$$(x' + 2\sqrt{2}x' + 2) - y'^2 = 1$$

$$(x' + \sqrt{2})^2 - y'^2 = 5$$

$$\frac{(x' + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{5})^2} - \frac{y'^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$$

Получаем, что данная кривая – гипербола, с полуосями $\sqrt{5}$

Центр гиперболы находится в точке

$$x' + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow x' = -\sqrt{2}$$

$$y' = 0$$

Тогда,

Задача скачана с сайта www.MatBuro.ru

Еще примеры: https://www.matburo.ru/ex_ag.php?p1=aglin

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2} * 0 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} * 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Асимптоты гиперболы имеют вид

$$y' = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}(x' + \sqrt{2}) \Rightarrow y' = \pm(x' + \sqrt{2})$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \sqrt{2} \right) \Rightarrow y = -1 \text{ \& } x = -1$$

Строим график

