Тема: Линейные пространства

ЗАДАНИЕ. Образуют ли многочлены $p_1(x)=x^3+x^2-1,\ p_2(x)=x^2-2x,\ p_3(x)=x^3+x,\ \ p_4(x)=x^2-3$ базис в пространстве P_3?

РЕШЕНИЕ. Стандартный базис в пространстве P_3 имеет вид $\{1,x,x^2,x^3\}$ и содержит четыре базисных элемента. Чтобы доказать, что многочлены $p_1(x)=x^3+x^2-1,\ p_2(x)=x^2-2x,\ p_3(x)=x^3+x,$ $p_4(x)=x^2-3$ образуют базис в пространстве P_3, достаточно показать, что они линейно независимы. Составим линейную комбинацию:

$$C_1p_1(x)+C_2p_2(x)+C_3p_3(x)+C_4p_4(x)=$$
$$=C_1x^3+C_1x^2-C_1\ +C_2x^2-2C_2x+C_3x^3+C_3x+C_4x^2-3C_4=$$
$$=x^3(C_1+C_3)+x^2(C_1+C_2+C_4)+x(-2C_2+C_3)+(-C_1-3C_4)$$

Данная линейная комбинация равна нулю только тогда, когда равны нулю все коэффициенты при степенях x, то есть приходим к системе:

$$\begin{cases} C_1+C_3=0, \\ C_1+C_2+C_4=0, \\ -2C_2+C_3=0, \\ -C_1-3C_4=0; \end{cases}$$

которая имеет единственное решение $C_1=C_2=C_3=C_4=0$, что и означает, что многочлены $p_1(x)=x^3+x^2-1,\ p_2(x)=x^2-2x,\ p_3(x)=x^3+x,\ \ p_4(x)=x^2-3$ линейно независимы, а следовательно, образуют базис в пространстве P_3.