

Микроэкономика, пример решения задачи Функция полезности. Оптимальный набор благ

ЗАДАНИЕ.

*Решить прямую задачу потребителя (найти оптимальную
потребительскую корзину). Дано: Функция полезности потребителя*

*$U = \sqrt{xy}$. Цена блага x равна 15, цена блага y равна 20, доход потребителя
равен 300.*

Найти: Оптимальный набор благ потребителя (x, y).

РЕШЕНИЕ.

Первый способ решения:

Необходимые условия экстремума:

1) Бюджетное ограничение $15x + 20y \leq 300$ в оптимальной точке должно выполняться как равенство.

2) Отношения предельных полезностей благ должны равняться отношениям

их рыночных цен $\frac{x}{y} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 15x + 20y = 300 \\ \frac{x}{y} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Выражаем из второго уравнения y и подставляем в 1-ое:

$$y = \frac{3}{4}x; \quad 15x + 20 \cdot \frac{3}{4}x = 300; \quad 15x + 15x = 300; \quad 30x = 300; \quad x = 10.$$

$$y = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4} \cdot 10 = 7,5.$$

Таким образом, оптимальный набор благ составляют 10 и 7,5 единиц.

Второй способ решения:

Задача оптимального программирования имеет вид:

$$U = \sqrt{xy} \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 15x + 20y = 300 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Для её решения выражаем из бюджетного ограничения $15x + 20y = 300$ одну

переменную через другую: $y = \frac{300 - 15x}{20} = 15 - 0,75x$.

Подставляем в целевую функцию:

$$U = \sqrt{xy} = \sqrt{x(15 - 0,75x)} = \sqrt{15x - 0,75x^2}.$$

Находим производную и приравниваем её к нулю:

$$U' = \frac{1}{2\sqrt{15x - 0,75x^2}} \cdot (15 - 0,75 \cdot 2x) = \frac{15 - 1,5x}{2\sqrt{15x - 0,75x^2}} = \frac{1,5(10 - x)}{2\sqrt{15x - 0,75x^2}} = 0.$$

Получаем: $10 - x = 0$; $x = 10$; $y = 15 - 0,75x = 15 - 7,5 = 7,5$.

Таким образом, оптимальный набор благ составляют 10 и 7,5 единиц.