

Тема: несобственный интеграл

ЗАДАНИЕ. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

РЕШЕНИЕ:

Это несобственный интеграл с бесконечным пределом, подынтегральная функция

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$, которая меняет знак. Поэтому используем признак Дирихле.

Признак Дирихле. Пусть

1) функция $f(x)$ интегрируема в любом конечном промежутке $[a; A]$, $A > a$, и

интеграл оказывается ограниченным: $\left| \int_a^A f(x) dx \right| \leq K$, $K = \text{const}$, $a \leq A < \infty$.

2) функция $g(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$: $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

Тогда интеграл $\int_a^{\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Положим $f(x) = \frac{\sin x}{x} = \varphi(x)\psi(x)$, где $\varphi(x) = \frac{1}{x} \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$ и $\psi(x) = \sin x$, первообразная ограничена $\Psi(x) = \int \sin x dx = -\cos x$. Значит, этот интеграл сходится.

ОТВЕТ: сходится.