

Тема: Определенный интеграл

ЗАДАНИЕ. Вычислить определенный интеграл

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} x \operatorname{ctg}^2 x dx.$$

РЕШЕНИЕ. Используем тригонометрическую формулу $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$, получаем

интеграл:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} x \operatorname{ctg}^2 x dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x}{\sin^2 x} dx - \int_{\pi/4}^{\pi/2} x dx = - \int_{\pi/4}^{\pi/2} x d(\operatorname{ctg} x) - \int_{\pi/4}^{\pi/2} x dx =$$

Применяем формулу интегрирования по частям: $\int u dv = uv - \int v du$. Получаем:

$$= -x \operatorname{ctg} x \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{ctg} x dx - \frac{x^2}{2} \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{32} - \ln |\sin x| \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = -\frac{3}{32} \pi^2 + \frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \ln 2.$$