

## Спектральная плотность стационарного случайного процесса

### Пример решения задачи

**Задача.** Найти спектральную плотность стационарной случайной функции  $X(t)$ , если ее корреляционная функция имеет вид:

$$k_x(\tau) = e^{-0,3|\tau|}.$$

**Решение.**

По определению спектральную плотность можно найти как преобразование Фурье:

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-0,3|\tau|} \cos \omega \tau d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-0,3\tau} \cos \omega \tau d\tau =$$

$$\left| \begin{array}{l} u = e^{-0,3\tau}, \quad du = -0,3e^{-0,3\tau} d\tau, \\ dv = \cos \omega \tau d\tau, \quad v = \frac{1}{\omega} \sin \omega \tau \end{array} \right|$$

$$= \frac{2}{\pi} \left( \underbrace{\frac{e^{-0,3\tau}}{\omega} \sin \omega \tau}_0 \right) \Big|_0^{\infty} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{0,3}{\omega} \int_0^{\infty} e^{-0,3\tau} \sin \omega \tau d\tau =$$

$$\left| \begin{array}{l} u = e^{-0,3\tau}, \quad du = -0,3e^{-0,3\tau} d\tau, \\ dv = \sin \omega \tau d\tau, \quad v = -\frac{1}{\omega} \cos \omega \tau \end{array} \right|$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{0,3}{\omega} \left( -\frac{e^{-0,3\tau}}{\omega} \cos \omega \tau \Big|_0^{\infty} - \frac{0,3}{\omega} \int_0^{\infty} e^{-0,3\tau} \cos \omega \tau d\tau \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{0,3}{\omega} \left( \frac{1}{\omega} - \frac{0,3}{\omega} \int_0^{\infty} e^{-0,3\tau} \cos \omega \tau d\tau \right) = \frac{0,6}{\pi \omega^2} - \frac{0,09}{\omega^2} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-0,3\tau} \cos \omega \tau d\tau.$$

Получили равенство  $S_x(\omega) = \frac{0,6}{\pi \omega^2} - \frac{0,09}{\omega^2} \cdot S_x(\omega).$

$$S_x(\omega) \left( 1 + \frac{0,09}{\omega^2} \right) = \frac{0,6}{\pi \omega^2}.$$

Отсюда получаем  $S_x(\omega) = \frac{0,6}{\pi(\omega^2 + 0,09)}$  - спектральная плотность стационарной

случайной функции  $X(t)$ .