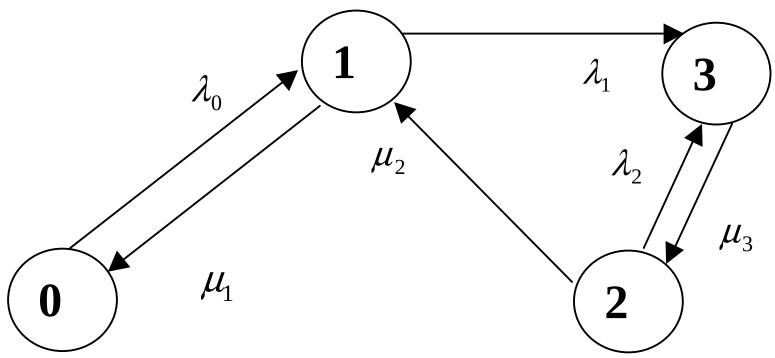
Граф переходов состояния марковского процесса

Пример решения задачи

Задача. Найти стационарные вероятности и математическое ожидание для марковского процесса $\boldsymbol{N}$, заданного графом переходов состояний.

Вариант 4



Вариант	λ_0	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	μ_3
4	1	1	1	1	2	3

Решение. Пусть $p_i(t)$ - вероятность того, что процесс (система) находится в состоянии S_i (равна i) в момент времени t, $i=0,1,2,3$.

Составим систему уравнений Колмогорова по следующим правилам: слева от знака равенства стоит производная от вероятности $p_i(t)$ - $\dfrac{p_i(t)}{dt}$, справа в уравнении стоит сумма произведений вероятностей всех переходов, входящих (входящие стрелки) в состояние S_i системы, на интенсивности состояний, из которых эти потоки исходят, минус вероятность $p_i(t)$, рассматриваемого состояния S_i, умноженная на суммарную интенсивность переходов, выводящих (выходящие стрелки) из данного состояния S_i систему. Для решения подобной системы необходимо добавить еще одно уравнение, определяющее нормировочное условие, поскольку сумма вероятностей всех состояний равна единице: $\sum_{i=0}^{3} p_i(t)=1$

Получаем систему:
$p_0(t)+p_1(t)+p_2(t)+p_3(t)=1$.

Составляем остальные уравнения по графу переходов:

$$\frac{dp_0(t)}{dt}=1p_1(t)-1p_0(t),$$
$$\frac{dp_1(t)}{dt}=2p_2(t)-1p_1(t),$$
$$\frac{dp_2(t)}{dt}=3p_3(t)-3p_2(t),$$
$$\frac{dp_3(t)}{dt}=1p_1(t)+1p_2(t)-3p_3(t).$$

Система для определения вероятностей различных состояний.

$$\begin{cases} \frac{dp_0(t)}{dt}=p_1(t)-p_0(t), \\ \frac{dp_1(t)}{dt}=2p_2(t)-p_1(t), \\ \frac{dp_2(t)}{dt}=3p_3(t)-3p_2(t), \\ \frac{dp_3(t)}{dt}=p_1(t)+p_2(t)-3p_3(t). \\ p_0(t)+p_1(t)+p_2(t)+p_3(t)=1 \end{cases}$$

Так как стационарные (предельные) вероятности постоянные, заменяем производные нулями (производная от константы – нуль) и приходим к системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} p_1-p_0=0, \\ 2p_2-p_1=0, \\ 3p_3-3p_2=0, \\ p_1+p_2-3p_3=0, \\ p_0+p_1+p_2+p_3=1. \end{cases}$$

Решим эту систему уравнений.

$$\begin{cases} p_1=p_0, \\ p_0=2p_2, \\ p_3=p_2, \\ p_0+p_2-3p_2=0, \\ p_0+p_0+p_2+p_2=1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1 = 2p_2, \\ p_0 = 2p_2, \\ p_3 = p_2, \\ 2p_2 + p_2 - 3p_2 = 0, \\ 4p_2 + p_2 + p_2 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1 = 1/3, \\ p_0 = 1/3, \\ p_3 = 1/6, \\ p_2 = 1/6. \end{cases}$$

Предельная вероятность каждого состояния:

$$\begin{cases} p_1 = 1/3, \\ p_0 = 1/3, \\ p_3 = 1/6, \\ p_2 = 1/6. \end{cases}$$

Математическое ожидание:

$$M = \sum i p_i = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{6}.$$