Уравнения Колмогорова, стационарное распределения цепи Маркова

Пример решения задачи

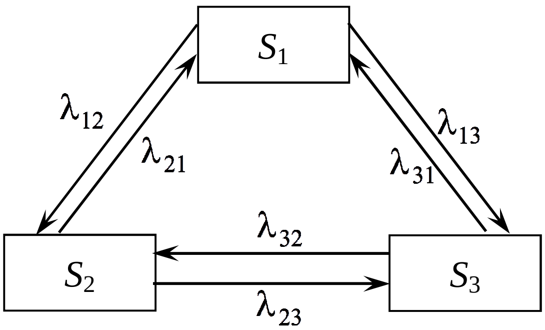
Задача. Система имеет три состояния. Построить граф состояний системы, написать уравнения Колмогорова и найти стационарное распределение.

№ варианта	λ_{12}	λ_{13}	λ_{21}	λ_{23}	λ_{31}	λ_{32}
9	1	1	0	2	3	0

$\lambda_{12}=0$, $\lambda_{13}=2$, $\lambda_{21}=3$, $\lambda_{23}=0$, $\lambda_{31}=2$, $\lambda_{32}=3$ – плотности перехода.

Решение.

Построим граф состояний системы.



Система дифференциальных уравнений Колмогорова имеет вид

$$\begin{cases} p_1' = \lambda_{21}p_2 + \lambda_{31}p_3 - (\lambda_{12}+\lambda_{13})p_1, \\ p_2' = \lambda_{12}p_1 + \lambda_{32}p_3 - (\lambda_{21}+\lambda_{23})p_2, \\ p_3' = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2 - (\lambda_{31}+\lambda_{32})p_3. \end{cases}$$

Любое из этих уравнений может быть отброшено, а соответствующая ему вероятность p_i (i=1,2,3) выражена через остальные с помощью нормировочного условия:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Так как рассматриваемый процесс считается стационарным, то производные p_i' принимаются равными нулю. Полученная система алгебраических уравнений примет вид:

$$\begin{cases}(\lambda_{12}+\lambda_{13})p_1=\lambda_{21}p_2+\lambda_{31}p_3,\\(\lambda_{21}+\lambda_{23})p_2=\lambda_{12}p_1+\lambda_{32}p_3,\\(\lambda_{31}+\lambda_{32})p_3=\lambda_{13}p_1+\lambda_{23}p_2.\end{cases}$$

Исключая одно из уравнений системы и подставляя соответствующие плотности перехода, получим систему:

$$\begin{cases}2p_1=0p_2+3p_3,\\2p_2=p_1+0p_3,\\p_1+p_2+p_3=1.\end{cases}$$

Решив систему, получим:

$$\begin{cases}2p_1=3p_3,\\2p_2=p_1,\\p_1+p_2+p_3=1.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{2}{3}p_1=p_3,\\p_2=\frac{1}{2}p_1,\\p_1+\frac{1}{2}p_1+\frac{2}{3}p_1=1.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{2}{3}p_1=p_3,\\p_2=\frac{1}{2}p_1,\\\frac{6+3+4}{6}p_1=1.\end{cases}$$

$$\begin{cases}p_1=\frac{6}{13},\\p_2=\frac{3}{13},\\p_3=\frac{4}{13}.\end{cases}$$

Т.е. в предельном стационарном режиме система в среднем с вероятностью $p_1=\frac{6}{13}$ будет находиться в состоянии S_1, и с вероятностями $p_2=\frac{3}{13}$, $p_3=\frac{4}{13}$ в состояниях S_2 и S_3.

Ответ: $p_1=\frac{6}{13}$; $p_2=\frac{3}{13}$, $p_3=\frac{4}{13}$.