Спектральная плотность стационарного случайного процесса

Пример решения задачи

Задача. Найти спектральную плотность стационарной случайной функции $X(t)$, если ее корреляционная функция имеет вид:

$$85.\quad k_x(\tau)=\begin{cases}1-0{,}5|\tau|, & |\tau|\le 2,\\ 0, & |\tau|>2\ .\end{cases}$$

Решение.
Найдем спектральную плотность $S_x(w)$ случайной функции $X(t)$ по формуле:

$$S_x(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k_x(\tau)e^{-iw\tau}d\tau=\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}(1-0,5|\tau|)e^{-iw\tau}d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{0}(1+0,5\tau)e^{-iw\tau}d\tau+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2}(1-0,5\tau)e^{-iw\tau}d\tau=$$

Используем формулу

$$I=\int te^{-iwt}dt=-\frac{1}{iw}\int td\left(e^{-iwt}\right)=-\frac{1}{iw}\left(te^{-iwt}-\int e^{-iwt}dt\right)=-\frac{1}{iw}\left(te^{-iwt}+\frac{1}{iw}e^{-iwt}\right)=$$

$$=\frac{iwt+1}{w^2}e^{-iwt}.$$

Получаем:

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{0}e^{-iw\tau}d\tau+\frac{1}{4\pi}\int_{-2}^{0}\tau e^{-iw\tau}d\tau+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2}e^{-iw\tau}d\tau-\frac{1}{4\pi}\int_{0}^{2}\tau e^{-iw\tau}d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{iw}e^{-iw\tau}\right)\Bigg|_{-2}^{0}+\frac{1}{4\pi}\frac{iwt+1}{w^2}e^{-iwt}\Bigg|_{-2}^{0}+\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{iw}e^{-iw\tau}\right)\Bigg|_{0}^{2}-\frac{1}{4\pi}\frac{iwt+1}{w^2}e^{-iwt}\Bigg|_{0}^{2}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{iw}+\frac{1}{iw}e^{2iw}\right]+\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{w^2}-\frac{-2iw+1}{w^2}e^{2iw}\right]+\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{iw}e^{-2iw}+\frac{1}{iw}\right]-\frac{1}{4\pi}\left[\frac{2iw+1}{w^2}e^{-2iw}-\frac{1}{w^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{iw}\left(e^{2iw}-e^{-2iw}\right)+\frac{1}{4\pi}\frac{2}{w^2}-\frac{1}{4\pi}\left[\frac{-2iw+1}{w^2}e^{2iw}+\frac{2iw+1}{w^2}e^{-2iw}\right]=$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\frac{2i}{w}\left(e^{2iw}-e^{-2iw}\right)+\frac{1}{2\pi w^2}-\frac{1}{4\pi}\left[\frac{-2i}{w}e^{2iw}+\frac{2i}{w}e^{-2iw}+\frac{1}{w^2}e^{2iw}+\frac{1}{w^2}e^{-2iw}\right]=$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\frac{2i}{w}\left(e^{2iw}-e^{-2iw}\right)+\frac{1}{2\pi w^2}-\frac{1}{4\pi}\frac{2i}{w}\left(e^{-2iw}-e^{2iw}\right)-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{w^2}\left[e^{2iw}+e^{-2iw}\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi w^2}-\frac{1}{4\pi w^2}\left[e^{2iw}+e^{-2iw}\right]=\frac{2-e^{2iw}-e^{-2iw}}{4\pi w^2}.$$

Получили $S_x(w)=\dfrac{2-e^{2iw}-e^{-2iw}}{4\pi w^2}$.