

Спектральная плотность стационарного случайного процесса

Пример решения задачи

Задача. Дана спектральная плотность

$$S_q(\omega) = \begin{cases} a, & |\omega| \leq N, \\ 0, & |\omega| > N. \end{cases}$$

Определить корреляционную функцию $K_\xi(\tau)$ и дисперсию D_ξ .

Решение. Если задана спектральная плотность $S_q(\omega)$:

$$S_q(\omega) = \begin{cases} a, & |\omega| \leq 7, \\ 0, & |\omega| > 7. \end{cases}$$

то корреляционную функцию можно найти по следующей формуле:

$$K_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_q(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Получаем:

$$K_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_q(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-7}^7 a e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{a}{i\tau} e^{i\omega\tau} \Big|_{-7}^7 = \frac{a}{i\tau} (e^{7i\tau} - e^{-7i\tau}) = \frac{a}{i\tau} 2i \sin(7\tau) = \frac{2a}{\tau} \sin(7\tau).$$

Дисперсия:

$$D_\xi = K_\xi(0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{2a}{\tau} \sin(7\tau) = 2a \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sin(7\tau)}{\tau} = 14a \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sin(7\tau)}{7\tau} = 14a.$$