Решенная задача на тему: матрица бинарного отношения

ЗАДАНИЕ.

Отношение R на множестве X = {a, в, c, d} задано матрицей.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Каковы свойства отношения R? Как выглядят матрицы отношений R^{-1}, $R \circ R$?

РЕШЕНИЕ.

Используем следующие правила:

1) У рефлексивного отношения на главной диагонали только единицы.
2) У антирефлексивного отношения на главной диагонали только нули.
3) У симметричного отношения матрица симметрична относительно главной диагонали.
4) У антисимметричного отношения если вне главной диагонали имеется 1, то на симметричном ей месте стоит 0.

Рассматриваем матрицу отношения.

$$[R] = A_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получаем, что отношение

- не является рефлексивным,
- является антирефлексивным,
- не является симметрическим,
- не является антисимметрическим.

Транзитивность проверим по матрице отношения $R \circ R$. Вычислим ее:

$$[R \circ R] = [R] \cdot [R] = A_R \cdot A_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как не выполняется, что $R \circ R \subseteq R$, отношение не транзитивно.

Матрица отношения R^{-1} равна транспонированной матрице отношения R, поэтому:

$$\left[R^{-1}\right]=\left[R\right]^T=\left(A_R\right)^T=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&1&1&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&1&1\\1&1&1&0\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

Матрица отношения $R\circ R$ вычислена выше.