Пример решения задачи. Бинарные отношения

Для заданных на множестве A={1,2,3,4,5} бинарных отношений ρ *и* τ:

а) записать матрицы и построить графики;

б) найти композицию $\rho \circ \tau$;

в) исследовать свойства отношений ρ, τ *и* $\rho \circ \tau$ *(рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность).*

Решение:

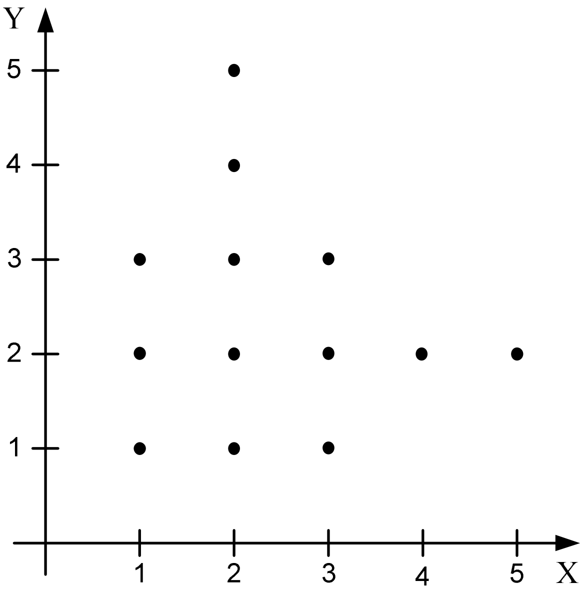
A={1,2,3,4,5};

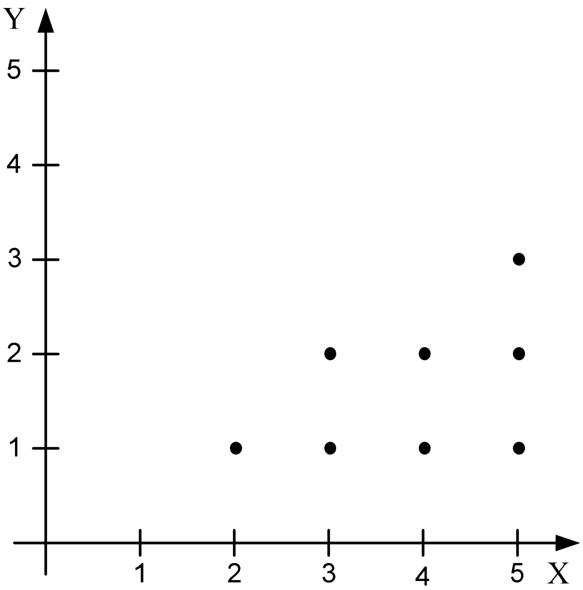
$\rho = \{(x, y) : |(x-2)(y-2)| \le 1\}$; $\qquad \tau = \{(x, y) : 2x \ge 3y\}$

а) Матрицы бинарных отношений:

$$\| \rho \| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \| \tau \| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Графики бинарных отношений:





б) Матрица композиции ρ ∘ τ равна sign(||ρ||·||τ||), где матрицы умножаются классическим образом «строка на столбец» с заменой всех полученных элементов по правилу: нулевые элементы остаются нулевыми, а все ненулевые элементы заменяются единицами.

$$\|\rho\circ\tau\| = sign\begin{pmatrix}1&1&1&0&0\\1&1&1&1&1\\1&1&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

в) Свойства отношений ρ, τ и ρ ∘ τ.

1) Т.к. на главной диагонали матриц отношений есть нули, отношения ρ, τ и ρ ∘ τ не является рефлексивным.

2) Отношение τ является иррефлексивным, т.к. на главной диагонали матрицы ||τ|| стоят все нули. Остальные отношения ρ и ρ ∘ τ не являются иррефлексивными.

3) Отношение ρ является симметричным, т.к. матрица ||ρ|| и график отношения симметричны относительно главной диагонали. Остальные отношения τ и ρ ∘ τ не являются симметричными.

4) Для проверки антисимметричности отношений τ и ρ ∘ τ вычислим для них поэлементные произведения матрицы самого отношения и матрицы обратного отношения:

$$\|\tau\| \otimes \|\tau^{-1}\| = \|\tau\| \otimes \|\tau\|^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отношение τ является антисимметричным, т.к. нулевая матрица тоже является частью единичной матрицы.

$$\|\rho \circ \tau\| \otimes \|\rho \circ \tau\|^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отношение ρ ∘ τ не является антисимметричным, т.к. не все элементы вне главной диагонали нулевые.

5) Бинарное отношение p на множестве A транзитивно тогда и только тогда, когда его квадрат содержится в нем, т.е. $\rho \circ \rho \subseteq \rho$.

Для проверки транзитивности вычислим квадраты матриц.

$$\|\rho\|^2 = sign \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\|\tau\|^2 = sign\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0 \end{pmatrix};$$

$$\|\rho\circ\tau\|^2 = sign\begin{pmatrix} 1&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0\\ 1&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0\\ 1&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0\\ 1&1&1&0&0\\ 1&1&1&0&0\\ 1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Отношение является транзитивным, если полученная матрица является частью исходной матрицы бинарного отношения.

Для отношений ρ и $\rho\circ\tau$ в матрицах квадратов этих отношений ρ^2 и $(\rho\circ\tau)^2$ содержатся единицы, которых не было в матрицах самих отношений, поэтому $\rho^2 \not\subset \rho$ и $(\rho\circ\tau)^2 \not\subset \rho\circ\tau$. Следовательно, эти отношения не являются транзитивными.

Для отношения τ квадрат отношения имеет матрицу

$$\|\tau\|^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Все единицы этой матрицы содержатся также и в матрице самого отношения

$$\tau = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, имеет место включение $\tau^2 \subseteq \tau$ и отношение τ является транзитивным.