

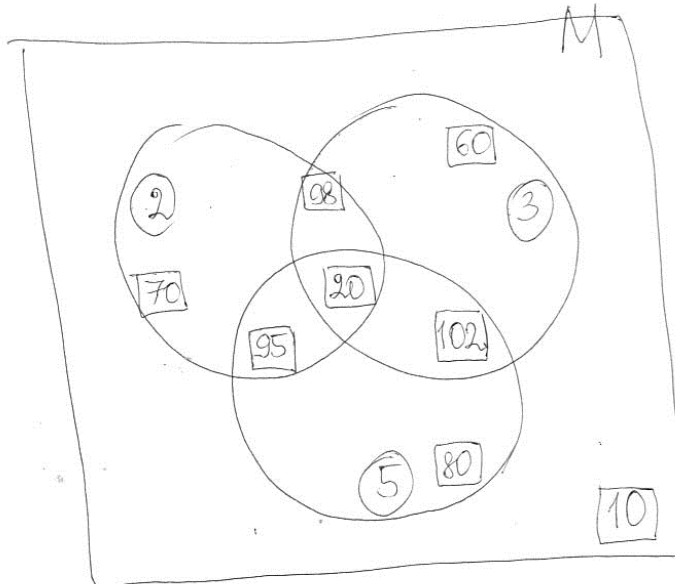
Задача по теории множеств с решением Метод включений-исключений

ЗАДАНИЕ.

M - подмножество множества натуральных чисел. 10 элементов множества M являются простыми числами, а остальные кратны либо 2, либо 3, либо 5. Определить мощность множества M , если оно содержит: 70 чисел кратных 2; 60 чисел кратных 3; 80 чисел кратных 5; 98 чисел кратных или 2 или 3; 95 чисел кратных или 2 или 5; 102 числа кратных или 3 или 5; 20 чисел, кратных 30.

РЕШЕНИЕ.

Начертим диаграмму Эйлера-Венна и нанесем на нее данные задачи:



10 элементов не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5.

70 элементов делятся на 2.

60 элементов делятся на 3.

80 элементов делятся на 5.

98 чисел делятся или на 2 или на 3.

95 чисел делятся или на 2 или на 5.

102 числа делятся или на 3 или на 5.

20 чисел делятся и на 2, и на 3, и на 5.

Используем формулу:

$|X_i \cup X_j| = |X_i| + |X_j| - |X_i \cap X_j|$, X_i - количество чисел, делящихся на i .

Получаем: $|X_i \cap X_j| = |X_i| + |X_j| - |X_i \cup X_j|$

На 2 и на 3 делятся $70 + 60 - 98 = 32$ числа.

На 2 и на 5 делятся $70+80-95=55$ чисел.

На 3 и на 5 делятся $80+60-102=38$ чисел.

Тогда чисел, делящихся или на 2, или на 3, или на 5:

$$\begin{aligned} |X_5 \cup X_2 \cup X_3| &= |X_5| + |X_2| + |X_3| - |X_5 \cap X_2| - |X_5 \cap X_3| - |X_3 \cap X_2| + |X_5 \cap X_2 \cap X_3| = \\ &= 70 + 60 + 80 - 32 - 55 - 38 + 20 = 105 \end{aligned}$$

Тогда мощность множества M равна мощности найденного множества плюс мощность множества простых чисел (10): $|M| = 105 + 10 = 115$.