

Тема: Линейное программирование. Метод искусственного базиса

ЗАДАНИЕ. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом.

$$f = 2X_1 + X_2 - 2X_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 \geq 8; \\ X_1 - X_2 + 2X_3 \geq 2; \\ -2X_1 - 8X_2 + 3X_3 \geq 1; \\ X_i \geq 0 (i = 1, 2, 3). \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Будем решать эквивалентную задачу

$$F = -2X_1 - X_2 + 2X_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 \geq 8; \\ X_1 - X_2 + 2X_3 \geq 2; \\ -2X_1 - 8X_2 + 3X_3 \geq 1; \\ X_i \geq 0 (i = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Введем дополнительные переменные, чтобы привести задачу к каноническому виду:

$$F = -2X_1 - X_2 + 2X_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 - X_4 = 8; \\ X_1 - X_2 + 2X_3 - X_5 = 2; \\ -2X_1 - 8X_2 + 3X_3 - X_6 = 1; \\ X_i \geq 0 (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6). \end{cases}$$

Так как нет единичных векторов, вводим искусственный базис:

$$F = -2X_1 - X_2 + 2X_3 - Mz_1 - Mz_2 - Mz_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 - X_4 + z_1 = 8; \\ X_1 - X_2 + 2X_3 - X_5 + z_2 = 2; \\ -2X_1 - 8X_2 + 3X_3 - X_6 + z_3 = 1; \\ X_i \geq 0 (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6). \end{cases}$$

Получили расширенную задачу с опорным планом (0,0,0,0,0,0,8,2,1). Составим симплекс-таблицу:

| Базис | План | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | z1 | z2 | z3 |
|-------|------|----|------|----------|----|----|----|----|----|----|
| z1 | 8 | 1 | 1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| z2 | 2 | 1 | -1 | 2 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| z3 | 1 | -2 | -8 | 3 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 |
| F | -11M | 2 | 8M+1 | -4M-2 | M | M | M | 0 | 0 | 0 |

В последней оценочной строке есть отрицательные оценки (смотрим на коэффициенты при M, пока искусственный базис не выйдет), поэтому нужно делать шаг симплекс-метода. Выбираем столбец с наименьшей оценкой, а затем разрешающий элемент – по наименьшему отношению свободных членов к коэффициентам столбца (последний столбец). Результат шага запишем в таблицу (разрешающий элемент будем выделять жирным). Аналогично будем повторять шаги.

| Базис | План | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | z1 | z2 | z3 |
|-------|------------|-----------|-------------|----|----|----|-----------|----|----|----------|
| z1 | 25/3 | 1/3 | -5/3 | 0 | -1 | 0 | -1/3 | 1 | 0 | 1/3 |
| z2 | 4/3 | 7/3 | 13/3 | 0 | 0 | -1 | 2/3 | 0 | 1 | -2/3 |
| x3 | 1/3 | -2/3 | -8/3 | 1 | 0 | 0 | -1/3 | 0 | 0 | 1/3 |
| F | -29/3M+2/3 | -8/3M+2/3 | -8/3M-13/3 | 0 | M | M | -1/3M-2/3 | 0 | 0 | 4/3M+2/3 |

| Базис | План | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | z1 | z2 | z3 |
|-------|------------|-------------|----|----|----|---------|-------|----|---------|--------|
| z1 | 115/13 | 16/13 | 0 | 0 | -1 | -5/13 | -1/13 | 1 | 5/13 | 1/13 |
| x2 | 4/13 | 7/13 | 1 | 0 | 0 | -3/13 | 2/13 | 0 | 3/13 | -2/13 |
| x3 | 15/13 | 10/13 | 0 | 1 | 0 | -8/13 | 1/13 | 0 | 8/13 | -1/13 |
| F | -115/13M+2 | -16/13M+3 | 0 | 0 | M | 5/13M-1 | 1/13M | 0 | 8/13M+1 | 12/13M |

| Базис | План | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | z1 | z2 | z3 |
|-------|------------|----|------------|----|----|------------|----------|----|----------|----------|
| z1 | 57/7 | 0 | -16/7 | 0 | -1 | 1/7 | -3/7 | 1 | -1/7 | 3/7 |
| x1 | 4/7 | 1 | 13/7 | 0 | 0 | -3/7 | 2/7 | 0 | 3/7 | -2/7 |
| x3 | 5/7 | 0 | -10/7 | 1 | 0 | -2/7 | -1/7 | 0 | 2/7 | 1/7 |
| F | -57/7M+2/7 | 0 | 16/7M-39/7 | 0 | M | -1/7M+2/7 | 3/7M-6/7 | 0 | 8/7M-2/7 | 4/7M+6/7 |

| Базис | План | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | z1 | z2 | z3 |
|-------|------|----|------------|----|----|----|----|-----|----|----|
| x5 | 57 | 0 | -16 | 0 | -7 | 1 | -3 | 7 | -1 | 3 |
| x1 | 25 | 1 | -5 | 0 | -3 | 0 | -1 | 3 | 0 | 1 |
| x3 | 17 | 0 | -6 | 1 | -2 | 0 | -1 | 2 | 0 | 1 |
| F | -16 | 0 | -1 | 0 | 2 | 0 | 0 | M-2 | M | M |

Искусственный базис выведен, но в единственном столбце с отрицательной оценкой (X_2) все коэффициенты отрицательны, то есть **функция не ограничена на множестве допустимых решений, оптимальный план найти невозможно.**