Решение ручным симплекс-методом задачи линейного программирования с заданным опорным планом

ЗАДАНИЕ. *Решить задачу симплекс-методом, рассматривая в качестве начального опорного плана, план, приведенный в условии:*

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \end{cases}$$
$$x_i \ge 0,\ i = 1,2,3,4,$$
$$X = (0,0,1,1)$$

РЕШЕНИЕ. Запишем задачу, обозначив целевую функцию:

$$L = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \end{cases}$$
$$x_i \ge 0,\ i = 1,2,3,4.$$

Так как начальный план задан: $X_0 = (0,0,1,1)$, полагаем основными переменными x_3 и x_4 (ОП), неосновными переменными x_1 и x_2 (НОП).

Разрешаем систему ограничений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \end{cases}$$

относительно ОП.

Вычитаем из второго уравнения первое:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \end{cases}$$

Теперь прибавляем к первому уравнению второе, умноженное на 2.

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \end{cases}$$

Делим первое уравнение на 3:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \end{cases}$$

Переносим НОП в другую сторону:

$$\begin{cases} x_3 = 1 - x_1 + 2x_2, \\ x_4 = 1 - x_1 + x_2. \end{cases}$$

Выражаем целевую функцию через НОП:

$L = x_1 + 2x_2 - (1 - x_1 + 2x_2) + (1 - x_1 + x_2) = x_1 + 2x_2 - 1 + x_1 - 2x_2 + 1 - x_1 + x_2 = x_1 + x_2$.

Так как коэффициенты при переменных положительны, целевую функцию можно увеличить, вводя в базис одну из НОП. Так как коэффициенты при x_1 и x_2 одинаковы, можно вводить любую переменную. Введем x_2. Диапазон изменения x_2:

$$\begin{cases} x_3 = 1 + 2x_2 \ge 0, \\ x_4 = 1 + x_2 \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 \ge -1/2, \\ x_2 \ge -1. \end{cases}$$

Очевидно, что x_2 всегда удовлетворяет данным ограничениям, ее можно увеличивать бесконечно. При этом значение целевой функции будет увеличиваться, а ограничения

$x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1,$

$2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2,$

будут выполняться за счет того, что присутствуют отрицательные слагаемые вида $-2x_3$ и $-x_3$.

Задача *не имеет оптимального плана*, *целевая функция не ограничена*.

Приведем табличную запись. Имеем задачу:

$L = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = 1, 2, 3, 4$

Опорный план: $X_0 = (0, 0, 1, 1)$. Заполняем таблицу:

Базис	**План**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**
x4	1	1	-1	0	1
x3	1	1	-2	1	0
L	0	-1	-1	0	0

В строке L отрицательные оценки, значит, план не оптимален. Но в столбце $x2$ с отрицательной оценкой все элементы отрицательны, поэтому функция не ограничена. Оптимального решения нет.