Тема: Производная аналитической функции

Задание. *Доказать, что* $f(z)=\sin\frac{z}{3}$ *- аналитическая функция и найти производную в точке* $z_0=\frac{\pi}{6}i$.

Решение. Пусть $z=x+yi$, тогда

$$f(z)=\sin\frac{x+yi}{3}=\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{3}i\right)=\sin\frac{x}{3}ch\frac{y}{3}-ish\frac{y}{3}\cos\frac{x}{3}=u(x,y)+iv(x,y)$$

$$u(x,y)=\sin\frac{x}{3}ch\frac{y}{3};\ v(x,y)=-sh\frac{y}{3}\cos\frac{x}{3}.$$

Проверим аналитичность при помощи условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}ch\frac{y}{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}sh\frac{y}{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{3}sh\frac{y}{3}\sin\frac{x}{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{3}ch\frac{y}{3}\sin\frac{x}{3}$$

Получили $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$, то есть условия Коши-Римана выполнены, значит, функция аналитическая.

Для аналитических функций справедливы все правила и формулы дифференцирования функции действительного аргумента, поэтому

$$f'(z)=\frac{1}{3}\cos\frac{z}{3}.$$

В точке $z_0=\frac{\pi}{6}i$ получаем

$$f'(\frac{\pi}{6}i)=\frac{1}{3}\cos\frac{\frac{\pi}{6}i}{3}=\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{18}i=\frac{1}{3}\frac{e^{i\frac{\pi}{18}i}+e^{-i\frac{\pi}{18}i}}{2}=\frac{1}{16}\left(e^{-\frac{\pi}{18}}+e^{\frac{\pi}{18}}\right)=$$

$$=\frac{1}{16}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{18}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\right)=\frac{1}{8}\cos\frac{\pi}{18}.$$

Ответ: $\frac{1}{8}\cos\frac{\pi}{18}$